



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN ASTROFISICA E FISICA SPAZIALE

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Dinamica delle sottostrutture
in simulazioni di ammassi di galassie**

Candidato:

MUNARI EMILIANO

Matricola:

62700045

Relatore:

PROF. BORGANI STEFANO

Correlatore:

DOTT. BIVIANO ANDREA

Anno Accademico 2009/10

*Generations to come will scarce believe that such a one as this
ever in flesh and blood walked upon this Earth*

Einstein speaking about Gandhi

Indice

1	Introduzione	1
2	Metodi numerici per la cosmologia	5
2.1	Metodi N-body	7
2.1.1	Metodo PP	7
2.1.2	Metodi con griglia	8
2.1.3	Algoritmo TREE	9
2.2	Metodi idrodinamici: il metodo SPH	11
2.3	Il codice GADGET-2	13
2.4	Condizioni iniziali	15
2.5	Le risimulazioni	17
2.6	Identificazione delle strutture	17
3	Equilibrio dei sistemi non collisionali	23
3.1	L'equazione non collisionale di Boltzmann	23
3.2	Le equazioni di Jeans	25
3.3	Equilibrio di sistemi quasi sferici	27
3.4	Il teorema del viriale	29
3.4.1	L'energetica del collasso	31
3.5	Il rilassamento violento	31
3.6	Frizione dinamica	32
4	Struttura e dinamica degli ammassi di galassie	35
4.1	L'azione dello stripping mareale	35
4.2	Formazione degli aloni	46

4.3	Distribuzione delle sottostrutture nell'ammasso	49
4.4	Rassegna dei fatti osservativi	52
4.4.1	Il profilo di densità	53
4.4.2	La dispersione di velocità	57
4.4.3	Evidenze di equilibrio dinamico negli ammassi	60
5	Dinamica delle sottostrutture in simulazioni realizzate con GADGET2	65
5.1	Le simulazioni utilizzate	65
5.2	Processo di stacking	66
5.3	Le orbite delle sottostrutture	68
5.3.1	Profilo di anisotropia	70
5.3.2	Profilo di dispersione radiale	73
5.4	Soluzione equazione di Jeans ed equilibrio	79
6	Conclusioni	85
A	Formazione delle strutture cosmiche	89
A.1	Approssimazione newtoniana	90
A.2	La statistica del campo di densità	91
A.2.1	La varianza	92
A.2.2	Scale di filtraggio	93
A.3	Evoluzione lineare del campo di densità per un fluido collisionale	94
A.4	Evoluzione lineare del campo di densità per un fluido non collisionale	96
A.5	Il collasso sferico	98
A.6	L'approssimazione di Zel'Dovich	102
B	Media biweight	107
	Riferimenti bibliografici	110
	Ringraziamenti	115

Introduzione

Gli ammassi di galassie sono sistemi complessi, il cui studio ci permette di ricavare informazioni sull'evoluzione e la struttura dell'Universo. Ma ci consente anche di capire quali fossero le condizioni primordiali da cui si sono formate le galassie e le influenze che queste hanno sulle altre galassie del sistema. Lo scenario cosmologico Λ CDM gerarchico prevede la formazione di strutture a partire da iniziali perturbazioni di un campo di densità sostanzialmente omogeneo ed isotropo. Queste fluttuazioni crebbero grazie alla propria gravità, e formarono strutture inizialmente piccole che successivamente, aggregandosi, formarono le grandi strutture. Oggi osserviamo un Universo formato da una struttura a ragnatela (vedi Figura 2.3), dove zone ad alta densità ricche di stelle e galassie sono tra di loro collegate da filamenti di materia a bassa densità che tracciano i bordi di enormi bolle di spazio sostanzialmente vuoto. All'intersezione dei filamenti ci sono gli ammassi di galassie, che sono strutture in equilibrio dinamico (o prossime all'equilibrio), con una massa caratteristica di $10^{14} - 10^{15} M_{\odot}$, un diametro di qualche Mpc e che contengono tipicamente diverse centinaia di galassie.

Per avere conferme di quanto previsto da questo modello dobbiamo guardare nel passato, ovvero dobbiamo studiare oggetti talmente lontani che solo ora ci è giunta la loro luce, portando con sé l'informazione di com'era l'Universo quando essa è stata emessa. Ma anche senza osservazioni dirette di questi oggetti del passato, sono tante le informazioni che possiamo avere studiando la dinamica di sistemi meno antichi. Uno dei principali problemi consiste nel fatto che una descrizione completa di un tale sistema richiede informazioni sulla sua struttura nello spazio delle fasi (cioè posizione e velocità delle sue componenti),

mentre osservativamente abbiamo informazioni al massimo su tre delle sei componenti di posizione e velocità. Noi infatti osserviamo una distribuzione proiettata sulla volta celeste. La posizione o la densità, sia essa in numero o di luminosità, ci forniscono informazioni bidimensionali, e bisogna inferire la terza dimensione sulla base di altre caratteristiche. Ad esempio un grosso problema è rappresentato dagli *interlopers*, ovvero le galassie che sono nello stesso campo visivo di un ammasso ma non vi appartengono. Tali “contaminanti” sono infatti oggetti che sono interposti tra noi e l’ammasso osservato. Per poter distinguere le strutture che effettivamente appartengono all’ammasso bisogna utilizzare altre informazioni, come ad esempio il redshift ¹. Oggetti a distanze cosmologiche che appartengono alla medesima struttura avranno il redshift dato dall’espansione dell’Universo pressochè uguale. Le velocità sono ancor più difficili da valutare in quanto abbiamo un’informazione monodimensionale, data dal redshift osservato. Esistono tecniche basate su metodi statistici per deconvolvere i dati delle osservazioni ed ottenere informazioni sulla distribuzione 3D spaziale e delle velocità. Si tratta di metodi statistici la cui accuratezza dipende dalla bontà e dalla quantità dei dati a disposizione.

Negli ultimi decenni sono nati nuovi strumenti per affrontare lo studio di questi sistemi. I moderni telescopi permettono di ottenere dati di qualità sempre migliore, ma necessariamente limitati dallo studio delle coordinate angolare e dal redshift che è una combinazione di coordinata radiale e velocità delle galassie lungo la linea di vista. Un potente strumento per lo studio dei sistemi complessi è costituito dalle simulazioni, che ci hanno permesso di studiare gli oggetti cosmologici con un livello di dettaglio non ottenibile da studi puramente analitici. Inoltre le simulazioni permettono di avere una descrizione completa dello spazio delle fasi. Il confronto tra dati e simulazioni permette quindi di capire quale descrizione dello spazio delle fasi è più adatta ad interpretare i dati osservativi. In questo lavoro di tesi abbiamo utilizzato tali simulazioni per studiare la dinamica delle strutture all’interno degli ammassi, per comprendere quali fenomeni agiscano e quali possano essere gli osservabili in grado di darci utili informazioni. Per pianificare una campagna osservativa è infatti essenziale essere sicuri di quali siano gli osservabili da cui possiamo ottenere infor-

¹Uno degli effetti dell’espansione dell’universo consiste nello spostamento verso il rosso degli spettri osservati. Il parametro che quantifica questo effetto è $z = (\lambda_o - \lambda_e) / \lambda_e$, dove λ_e è la lunghezza d’onda all’emissione e λ_o quella osservata. Questo fenomeno cosmologico non va confuso col redshift dovuto al moto relativo di due sorgenti, sebbene la definizione operativa sia la medesima. Data la finitezza della velocità della luce, è possibile legare il valore di z con la distanza della sorgente ed il tempo trascorso dall’emissione. Questi valori dipendono dal modello cosmologico adottato.

mazioni attendibili. Se ad esempio si volesse stimare la massa di ammassi ad alto redshift mediante la dinamica delle galassie, bisognerebbe essere sicuri che tali osservabili siano dei buoni traccianti del potenziale. Vedremo che quello che risulta dall'analisi effettuata in questa tesi è che effettivamente anche ad alto redshift le sottostrutture componenti un ammasso sono dei buoni traccianti del potenziale.

Le simulazioni cosmologiche sono trattate nel secondo capitolo di questa tesi. Vedremo come sono strutturate, quali sono le tecniche computazionali utilizzate, valutando i diversi vantaggi e svantaggi dei diversi metodi. In particolare vedremo la logica di funzionamento dei principali algoritmi implementati nelle simulazioni N-body e nelle simulazioni idrodinamiche. Con maggior attenzione vedremo il codice GADGET2 con cui sono state realizzate le simulazioni utilizzate in questo lavoro. Oltre al codice di simulazione parleremo degli algoritmi per l'identificazione delle strutture, indispensabili per isolare gli "oggetti" di cui dovremo studiarne la dinamica. Tali oggetti sono sottostrutture legate gravitazionalmente, da identificare con le galassie osservate per gli ammassi reali.

Nel terzo capitolo studieremo i sistemi non collisionali. Infatti la principale componente in materia dell'Universo è costituita dalla materia oscura fredda (Cold Dark Matter, CDM), che in genere viene considerata non collisionale. Capire come essa si comporta è dunque fondamentale. Descriveremo l'equazione di Jeans, che ci permetterà di studiare le condizioni di equilibrio dinamico di sistemi autogravitanti non collisionali in generale, e degli ammassi di galassie in particolare.

Nel quarto capitolo faremo una rassegna dei lavori teorici ed osservativi che trattano la dinamica degli ammassi. In questo capitolo introdurremo una serie di fenomeni che alterano la dinamica delle strutture e che sono quindi i processi a cui dedicheremo maggior attenzione. Vedremo dunque la frizione mareale, la *ram pressure stripping* e lo *stripping* mareale.

Nel quinto capitolo presenteremo l'analisi della dinamica delle strutture nelle simulazioni realizzate col codice GADGET2. Vedremo nel dettaglio i metodi statistici di analisi, come il metodo di *stacking* che permette di aumentare la statistica ed avere informazioni sulle proprietà dinamiche medie delle strutture, indipendentemente dalle peculiarità che può avere un singolo sistema. Analizzeremo da un punto di vista statistico le orbite delle sottostrutture, la loro anisotropia ed evoluzione temporale. Questo ci permetterà di valutare l'importanza dei diversi processi dinamici ed ottenere informazioni sull'equilibrio delle sottostrutture. Questo capitolo contiene la parte originale del lavoro di tesi, le cui conclusioni sono commentate nel capitolo 6, assieme ad una panoramica sulle future linee

di sviluppo.

Metodi numerici per la cosmologia

Il livello di complessità raggiunto dai sistemi oggetto di studio dell'astrofisica moderna ha reso arduo se non impossibile un approccio totalmente analitico. Si pensi ad esempio ad una galassia. Per descriverne la formazione e la successiva evoluzione bisogna utilizzare la gravità, considerare i fenomeni di frizione del gas, la formazione stellare, i processi radiativi e termodinamici, bisogna inoltre tener conto dei feedback da supernovae, e tanti altri aspetti che agiscono simultaneamente. A monte di tutto rimane poi il problema che un approccio analitico è utilizzabile solo per un massimo di 2 corpi. Già con 3 corpi non esiste una soluzione analitica generale e bisogna quindi ricorrere a soluzioni numeriche.

Fin dagli anni sessanta, quando furono disponibili i primi sistemi informatici, i ricercatori cominciarono a sfruttare le capacità di calcolo dei computers per affrontare i problemi a molti corpi. Per l'astrofisica questo significò cominciare a studiare le dinamiche di formazione di galassie e delle strutture a grande scala. Col passare del tempo la potenza di calcolo a disposizione della comunità scientifica aumentò in modo significativo, tanto che dagli anni ottanta le simulazioni divennero un potente strumento impiegato massivamente in astrofisica. In figura (2.1) riportiamo un plot di una simulazione fatta da White nel 1976 che utilizzava 700 particelle.

Accanto al progresso tecnologico della parte hardware, negli anni sono stati sviluppati algoritmi sempre più efficienti che hanno permesso di ridurre il tempo di elaborazione ed ottenere risoluzioni sempre più elevate. Alcuni di questi algoritmi verranno brevemente presentati nei prossimi paragrafi.

In questo lavoro di tesi verranno presentati i risultati ottenuti da simulazioni cosmo-

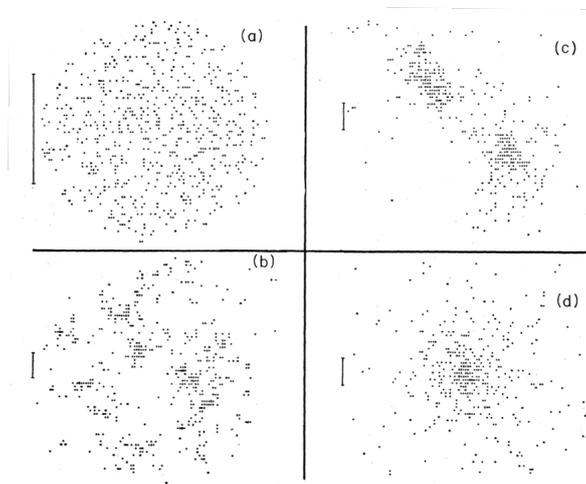


Figura 2.1: Simulazione del 1976 con 700 particelle. Questa figura mostra l'evoluzione temporale di un ammasso. Ogni punto rappresenta una galassia. Da Sarazin (1986)

logiche, descritte in maggior dettaglio più avanti, che permettono di studiare la struttura dell'Universo su scale da diversi Mpc fino a dimensioni galattiche, ovvero qualche kpc. È possibile quindi studiare il comportamento dell'Universo nel suo insieme così come quelle delle sue componenti. La coesistenza di scale così differenti ci permette di apprezzare fenomeni che non possono essere rigidamente classificati come relativi esclusivamente alla cosmologia o alla formazione galattica. Si pensi ad esempio a fenomeni di stripping del gas o di incontri tra galassie, che possono essere studiati con simulazioni come quelle utilizzate per questa tesi. Sebbene l'oggetto "galassia" non venga risolto nella sua struttura, esso è identificabile, e viene pertanto studiato all'interno dell'ambiente in cui si trova.

Se invece guardiamo scale maggiori, tali simulazioni ci permettono di studiare i processi di evoluzione delle strutture cosmiche. Ciò di cui hanno bisogno sono delle condizioni iniziali con cui partire, ed un motore che le faccia evolvere, ovvero la fisica. Quest'ultima è definibile mediante una serie di parametri, come le densità di materia-energia, parametro di Hubble e così via. Uno dei vantaggi di questa parametrizzazione è che variando i parametri otteniamo diverse realizzazioni dell'Universo e possiamo pertanto cercare quale set di parametri riproduce meglio l'Universo osservato.

In questo capitolo ci occuperemo delle principali tecniche per lo studio numerico del problema ad N corpi. I metodi che verranno di seguito presentati seguiranno un ordine di crescente complessità. In un certo senso questo ordine rispecchia l'ordine cronologico

con cui son stati implementati tali metodi. Infatti parallelamente all'aumentare della potenza di calcolo disponibile, si è cercato di ottimizzare i codici, diminuendo così il tempo necessario per l'elaborazione. Così facendo si potè aumentare il numero di particelle della simulazione, ovvero aumentare la risoluzione.

Il punto di partenza comune è considerare una porzione di Universo di forma cubica. Il lato di tale cubo dipende dalla scala che vogliamo studiare, generalmente dell'ordine del Gpc. Su tale scala l'Universo può essere considerato omogeneo, e quindi si possono imporre condizioni al contorno periodiche. Questa box viene riempita con un numero di particelle che varia a seconda del tempo di calcolo disponibile. Generalmente maggiore è il numero di particelle e maggiore sarà la risoluzione della simulazione, e quindi l'accuratezza con cui vengono apprezzati i fenomeni. Il metodo con cui si distribuiscono le particelle all'interno della box verrà discusso più avanti (Paragrafo 2.4). Esso è molto importante in quanto le condizioni iniziali rappresentano l'Universo primordiale, e solo con una buona rappresentazione di esso è possibile simulare l'Universo oggi osservato.

2.1 | Metodi N-body

2.1.1 Metodo PP

Il primo metodo implementato è sicuramente il più intuitivo, e prevede il calcolo diretto delle forze agenti su ogni particella dovute a tutte le altre particelle. Per questo motivo questo metodo è chiamato *Particle-Particle* o più semplicemente *PP*. Avremo quindi che la forza che agisce sulla particella i -esima dovuta alla particella j -esima sarà:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{Gm_i m_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \quad (2.1)$$

dove G è la costante di gravitazione universale, m_i ed m_j sono le masse, \vec{x}_i e \vec{x}_j sono le posizioni ed ϵ è il *parametro di softening*. Tale parametro è necessario in quanto due particelle possono trovarsi infinitamente vicine, e questo farebbe divergere la forza. Sarebbe dunque necessaria un'accuratezza infinitamente elevata nel calcolo delle orbite. Con l'aggiunta di ϵ anche se due particelle dovessero sovrapporsi, la forza sarebbe comunque finita. In tal senso il parametro di softening rappresenta la risoluzione spaziale della dinamica delle particelle. Calcolate le forze agenti su ogni particella si può poi trovare l'accelerazione e quindi calcolare lo spostamento durante un certo intervallo di tempo, o *time-step*, che rappresenta la risoluzione temporale della simulazione.

Questo metodo è chiaramente molto preciso, in quanto altro non è che il calcolo diretto delle forze fisiche che effettivamente agiscono sui corpi. Il problema è che ha un elevato costo computazionale. Ad ogni time-step il numero di operazioni da effettuare scala come $N(N-1)/2$. Per la semplicità concettuale e di implementazione, questo è stato il primo metodo numerico sviluppato. Ora non è più utilizzato come metodo principale a causa dell'alto costo computazionale che lo renderebbe inutilizzabile dato l'elevato numero di particelle impiegate nelle simulazioni moderne. Tuttavia esso è ancora in uso quando si vuole avere un'elevata precisione di calcolo in particolari zone della simulazione.

2.1.2 Metodi con griglia

Il metodo *Particle-Mesh (PM)* consente di ridurre il tempo di calcolo. Esso si basa sulla costruzione di una griglia su cui calcolare il potenziale gravitazionale a grande scala, ovvero risolvere l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}, t) = 4\pi G a^2 [\rho(\vec{x}, t) - \bar{\rho}(t)] \quad (2.2)$$

dove ϕ è il potenziale gravitazionale e $\bar{\rho}(t)$ è la densità del background. L'utilizzo di una griglia regolare e con condizioni al contorno periodiche permette di risolvere facilmente tale equazione nello spazio di Fourier, fatto questo che permette di velocizzare l'esecuzione del codice grazie all'utilizzo della FFT (Fast Fourier Transform).

Il costo computazionale è dell'ordine di $N \log N$, dove N è il numero di punti griglia. Tuttavia il problema in questo metodo risiede nella risoluzione che è limitata dalla spaziatura della griglia.

Per ovviare al problema della risoluzione si è ricorsi ad un metodo ibrido, il *Particle - Particle - Mesh* ovvero P^3M . Tale metodo utilizza l'algoritmo *PP* per il calcolo delle interazioni a corto raggio, ed il *PM* per quelle a lungo raggio.

Un ulteriore metodo per ovviare al problema della limitata risoluzione spaziale è l'utilizzo di griglie adattive. Si parla di codici *Adaptive Mesh Refinements* o *AMR*. Con questo metodo nelle zone ad alta densità, che sono quelle che necessitano di maggior risoluzione, viene costruita una griglia a trama più fitta, lasciando invece una griglia a passo largo nelle zone a bassa densità. Il costo computazionale risparmiato in queste ultime zone viene quindi impiegato per aumentare la risoluzione dove effettivamente necessario.

2.1.3 Algoritmo TREE

Questo metodo utilizza una suddivisione gerarchica che ricorda la struttura di un albero, da cui il nome di algoritmo TREE, vedi figura (2.2). L'idea principale è di trattare le particelle lontane come un'unica particella massiva. Per poter individuare i gruppi di particelle, si partiziona lo spazio in sottounità cubiche. Ogni cubo che contenga più di una particella viene ulteriormente suddiviso. Alla fine avrò solo celle che contengono 0 o 1 particelle. Le celle contenenti una particella sono dette le foglie dell'albero. Esse si raggruppano in strutture via via sempre più grandi dette rami, fino ad arrivare alla struttura più grande che è detta tronco. Ogni cella, sia essa una foglia o un ramo, è caratterizzata dalla massa totale e dal centro di massa determinati dalle particelle in essa contenute.

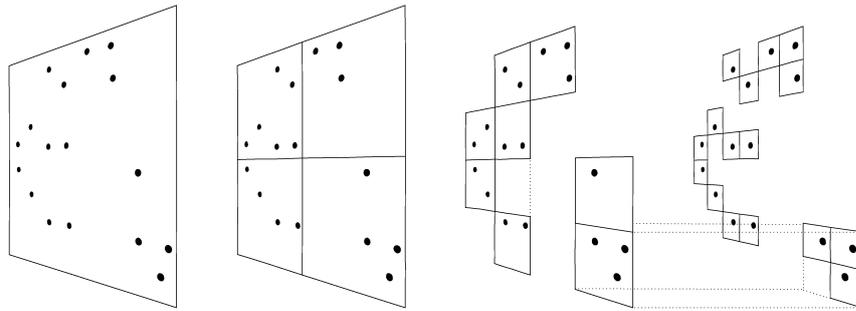


Figura 2.2: Schema bidimensionale della logica con cui lavora l'algoritmo TREE, da Springel, Yoshida e White (2001). L'immagine a sinistra è il tronco, quelle nel mezzo sono i rami di due diverse grandezze, ed infine a destra abbiamo le foglie, dove ogni cella contiene una sola particella.

Il metodo procede nella seguente maniera. Si considera una particella e si calcola la distanza D da essa di un nodo (ramo, foglia...). Se l è la larghezza della cella, quest'ultima verrà considerata come un'unica particella se $l/D < \theta$, dove θ è un parametro solitamente preso uguale ad 1 (Saro (2007/2008)). Se il rapporto è maggiore si procede analizzando le sottocelle finché non viene soddisfatta la disuguaglianza, o si raggiunge una cella contenente una sola particella.

Con questa tecnica sono state fatte recenti simulazioni ad altissima risoluzione. Ad esempio la *Millennium Run*, basata sul codice GADGET-2, lo stesso utilizzato nelle analisi di questa tesi, ha utilizzato più di 10 miliardi di particelle entro una box di simulazione di lato $500h^{-1}Mpc$ (Saro (2007/2008)). In figura (2.3) si mostra un'immagine tratta da Springel

et al. (2005) in cui è possibile apprezzare la complessità ed il dettaglio raggiunto da questa simulazione. In didascalia sono riportati i dettagli dell'immagine.

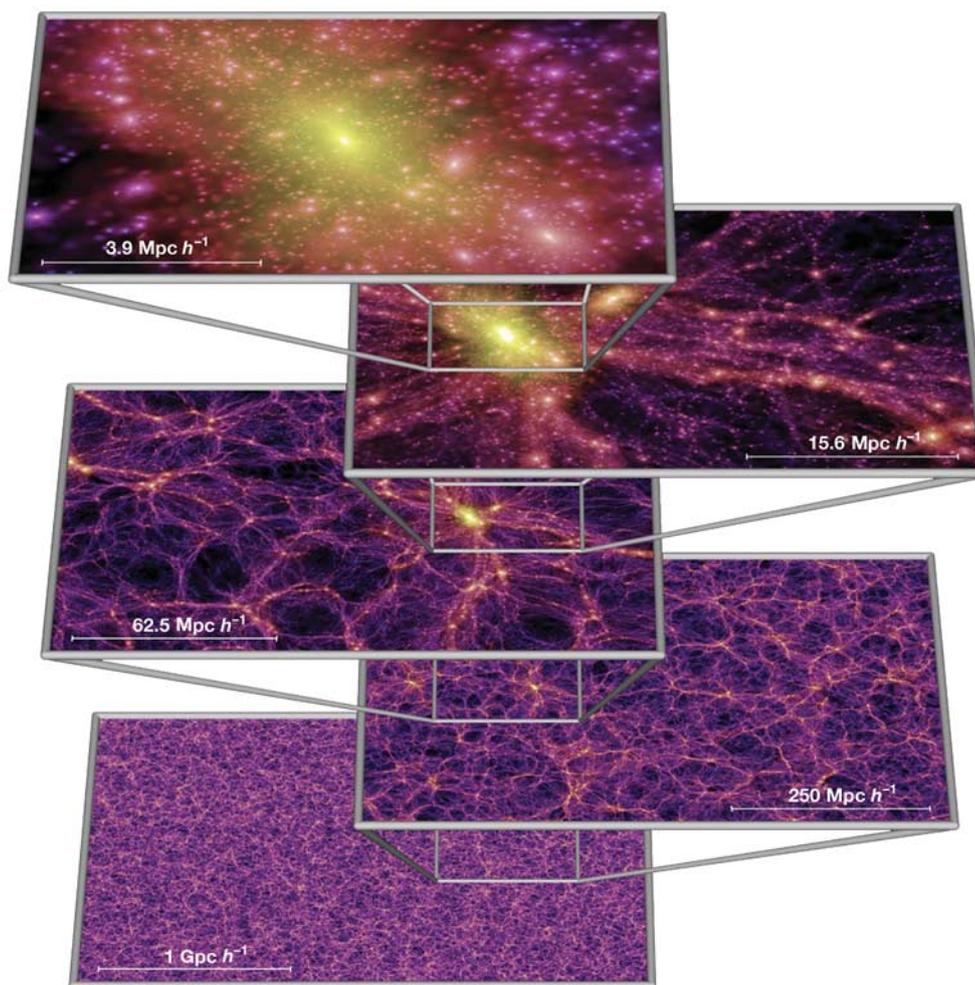


Figura 2.3: Il campo di Dark Matter nella simulazione *Millennium Run*. Ogni singola immagine mostra il campo di densità proiettato di una sezione spessa $15h^{-1}Mpc$. I colori sono un indice della densità. È ben visibile la struttura della ragnatela cosmica in un Universo Λ CDM. Si può notare l'omogeneità della struttura su grande scala e la comparsa di strutture nelle immagini a maggior ingrandimento. Si possono individuare i filamenti che connettono nodi contenenti strutture composte a loro volta da numerose sottostrutture. (da Springel et al. (2005)).

2.2 | Metodi idrodinamici: il metodo SPH

I metodi fin'ora visti sono utilizzabili per affrontare il problema N-body. Tuttavia la gamma dei fenomeni presenti in natura non può esser ristretta alla sola interazione gravitazionale. Nel momento in cui, oltre alla dark matter, vogliamo inserire nella simulazione anche gas e stelle, dobbiamo tener conto di tutti i fenomeni ad essi legati, non descrivibili con metodi N-body. Infatti, sebbene la dark matter sia la componente in massa maggiore nell'Universo, la maggior parte dei fenomeni osservabili derivano dal comportamento della materia barionica. Quest'ultima dev'essere riprodotta nella simulazione tenendo conto di processi termodinamici, di processi radiativi, formazione stellare, feedback da supernovae ed AGN, nonché arricchimenti chimici. Un approccio fluidodinamico ci consente di trattare tutti questi fenomeni.

Esistono due approcci per affrontare un problema idrodinamico: quello euleriano e quello lagrangiano.

Metodi euleriani: con questo tipo di approccio si seguono le variazioni delle quantità fisiche del fluido (ad esempio velocità, pressione, energia interna) in punti fissi dello spazio. Sostanzialmente si tratta di costruire una griglia e valutare le proprietà del fluido nelle celle. Tale griglia può essere fissa o adattiva, ma permane il problema principale dell'utilizzo delle griglie, come già visto nel paragrafo (2.1.2), che è la risoluzione spaziale finita. Il vantaggio principale riguarda invece la capacità intrinseca di trattare gli shock senza bisogno di alcun termine aggiuntivo artificiale come richiesto invece per i metodi lagrangiani.

Metodi lagrangiani: con questo tipo di approccio il fluido viene discretizzato, ed ogni elemento di fluido, a cui sono associate le varie quantità fisiche, viene seguito nella sua evoluzione temporale. Il vantaggio è che possiamo ottenere risoluzioni elevate, in quanto non siamo vincolati ad una griglia. Inoltre tale metodo è di più facile implementazione, in quanto è molto simile alla logica dei metodi N-body con cui viene trattata la dark matter. Lo svantaggio principale risiede invece nel trattamento degli shock, possibile solo inserendo una viscosità artificiale. Oltre a questo, un ulteriore problema è rappresentato dal fatto che non è possibile rappresentare gradienti di densità arbitrariamente elevati con un numero finito di elementi di fluido.

Una particolare implementazione della tecnica lagrangiana è la *Smoothed Particle Hydro-*

dynamics o *SPH*. Poichè questa tecnica è quella utilizzata nel codice *GADGET-2* usato per questo lavoro di tesi, andremo ora a vederne la logica base di funzionamento. Come abbiamo appena visto, nelle tecniche lagrangiane il fluido viene descritto da una distribuzione di elementi discreti. Si tratta di far evolvere tali particelle secondo le leggi dell'idrodinamica. Per evitare le fluttuazioni statistiche del numero di particelle, è conveniente effettuare medie delle quantità fisiche. Si tratta quindi di fare un'operazione di *smoothing*, da cui il nome del metodo. Se abbiamo una certa quantità $f(\vec{r})$, il suo valor medio risulta essere

$$\langle f(\vec{r}) \rangle = \int W(|\vec{r} - \vec{r}'|, h) f(\vec{r}') d^3 \vec{r}' \quad (2.3)$$

dove W è lo *smoothing kernel* descritto più avanti, ed h è la *smoothing length* che specifica la scala spaziale su cui avviene la media. h è in un certo senso la risoluzione del sistema, in quanto su scale più piccole le quantità risultano mediate. È chiaro quindi che ci si aspetta nel limite $h \rightarrow 0$ si ritrovino le quantità originarie, ovvero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle f(\vec{r}) \rangle_h = f(\vec{r}) \quad (2.4)$$

Ogni elemento di fluido sarà caratterizzato da una densità ρ_i , massa m_i e posizione \vec{r}_i . Il valore della generica quantità f associata all'elemento i sia A_i . L'equazione (2.3) può essere riscritta nel seguente modo:

$$\langle f(\vec{r}) \rangle = \int W(|\vec{r} - \vec{r}'|, h) \frac{f(\vec{r}')}{\rho(\vec{r}')} \rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}' \quad (2.5)$$

e possiamo quindi discretizzarla sostituendo l'elemento di massa $\rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}'$ con m_i . L'integrale diviene dunque una somma:

$$f(\vec{r}') = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(|\vec{r} - \vec{r}_j|, h) \quad (2.6)$$

Siamo a questo punto riusciti a discretizzare le quantità fluidodinamiche.

Vediamo un po' meglio il kernel. Esso rappresenta il volume su cui avviene l'operazione di media. In realtà dà anche un peso alle particelle che entrano nella media. Se per W usiamo una funzione *top-hat* otteniamo il classico volume di integrazione. Si potrebbe quindi pensare di usare un kernel gaussiano, che tiene conto di tutte le particelle, dando però maggior peso a quelle più vicine. In effetti le interazioni tra particelle decadono con la distanza. Tuttavia il problema di un kernel fatto in questo modo è che non avrebbe supporto compatto, ovvero l'integrazione dell'equazione (2.3) si estenderebbe su tutte le

particelle della simulazione. Questo ovviamente comporterebbe un costo computazionale non indifferente. Si preferisce dunque utilizzare kernel a supporto compatto. Ad esempio il codice GADGET-2 utilizza il seguente kernel:

$$W(r, h) = \frac{8}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - 6(r/h)^2 + 6(r/h)^3 & 0 \leq r \leq h/2 \\ 2(1 - r/h)^3 & h/2 \leq r \leq h \\ 0 & r \geq h \end{cases} \quad (2.7)$$

dove r è la distanza dalla particella. Come già detto sopra, h è la risoluzione del sistema. Analogamente al caso della griglia, si può obiettare che le regioni ad alta densità necessitano di risoluzioni maggiori. Abbassando h avremmo però un grosso costo computazionale in zone a bassa densità dove non è necessaria alta risoluzione. Anche in questo caso è quindi conveniente utilizzare una *smoothing length* adattiva, da scegliersi in base alla risoluzione necessaria in una determinata zona della simulazione. In genere si sceglie h in modo che il numero di particelle contenute nel volume di integrazione sia il medesimo.

A questo punto non rimane che risolvere le equazioni della fluidodinamica ad ogni time-step utilizzando le nuove quantità ottenute dalle medie.

2.3 | Il codice GADGET-2

GADGET, acronimo di *GA*laxies with *DA*rk matter and *GA*s *int*eracT è un codice di simulazione reso pubblico nel 2001 (Springel, Yoshida e White (2001)). È stato successivamente migliorato nel 2005 (Springel (2005)), prendendo il nome di GADGET-2. Esso è stato ideato per lavorare in parallelo su diversi processori, ed è in grado di simulare il comportamento della materia non collisionale (dark matter e stelle) così come di quella collisionale, riuscendo a trattare fenomeni di raffreddamento radiativo, riscaldamento, formazione stellare, feedback ed evoluzione chimica. Non ci addentreremo nei dettagli dell'implementazione di questi fenomeni, principalmente perchè per questo lavoro di tesi si sono usati run di sola dark matter con al massimo l'aggiunta del gas per considerare fenomeni di attrito. Questo codice, rilasciato sotto licenza GNU GPL¹ all'indirizzo <http://www.mpa-garching.mpg.de/gadget/>, utilizza uno schema TREE per la parte N-body, eventualmente

¹La licenza GNU GPL è un tipo di licenza che permette la copia e redistribuzione del materiale offerto con tale licenza, nonchè la modifica e la redistribuzione del materiale modificato, a patto che siano indicate le modifiche effettuate, e che il nuovo materiale sia rilasciato con la medesima licenza. La licenza completa è disponibile all'indirizzo <http://www.gnu.org/licenses/gpl.html>.

Risimulazioni	29
Particelle	304083239
Box size	1 Gpc^3
Ω_m	0.24
Ω_b	0.04
Ω_Λ	0.76

Tabella 2.1: Dati sulle simulazioni usate per questo lavoro di tesi. Alcune voci verranno spiegate nei paragrafi successivi.

in combinazione con uno schema PM per le interazioni a lungo range, ed SPH per la simulazione della parte idrodinamica.

Per quanto riguarda i time steps, il problema consiste nel fatto che nelle simulazioni cosmologiche c'è un ampio range dinamico nei tempi scala. Nelle regioni ad alta densità può essere necessario avere time step ordini di grandezza più piccoli di quelli necessari nelle regioni a bassa densità. Ovviamente sarebbe uno spreco di risorse computazionali utilizzare ovunque il time step più piccolo. Pertanto si adotta un time step variabile. Sostanzialmente nell'intervallo di tempo in cui le particelle di una zona a bassa densità ricevono un'accelerazione e si spostano, nelle zone ad alta densità vengono calcolate le accelerazioni ed aggiornate le posizioni molte volte.

Per quanto riguarda la parallelizzazione, si divide il volume in domini, ognuno dei quali viene assegnato ad un processore. Per costruire questi domini, in GADGET è stato implementato un metodo che consiste nella costruzione di un frattale (curva di Peano-Hilbert) che riempia lo spazio. Si mappa cioè lo spazio 3D in uno spazio 1D. La curva monodimensionale che si ottiene viene quindi tagliata in pezzi che definiscono i singoli domini. In figura (2.4) è possibile vedere un esempio di curva di Peano-Hilbert, in cui si può notare come con un processo ricorsivo sia possibile riempire lo spazio con densità arbitrariamente alta. Ogni processore elabora dunque le forze agenti sulle particelle del dominio assegnatogli, dialogando con i domini vicini per avere informazioni sulle proprietà delle particelle di tali domini che interagiscono con le proprie, comunicando a sua volta quelle dovute alle proprie particelle che interagiscono con le particelle dei domini vicini.

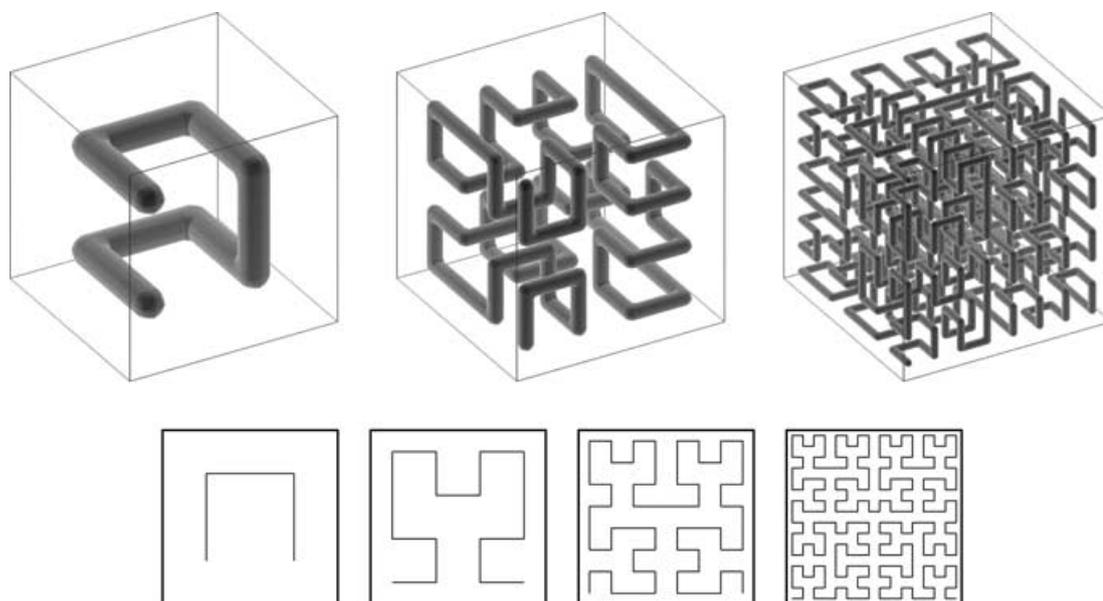


Figura 2.4: Curva di Peano-Hilbert in 3D (sopra) e nel caso 2D (sotto) (da Springel (2005)).

2.4 | Condizioni iniziali

I metodi sin'ora visti modificano la configurazione del sistema ad ogni time step. Ovviamente questo processo deve partire da una condizione iniziale che deve essere specificata. Questo è un passo delicato, perchè vista la causalità degli algoritmi visti sin'ora, errori nel definire le condizioni iniziali possono degenerare in maniera drammatica, e fornirci un quadro finale dell'Universo completamente sbagliato, anche se l'evoluzione è proceduta correttamente. Un po' come percorrere un'autostrada senza incidenti ed uscendo al quinto casello, ma entrando in direzione nord invece che in direzione sud!

Le teorie attuali dipingono un Universo che inizialmente era altamente omogeneo ed isotropo, ed aveva delle piccole sovradensità che, sotto opportune condizioni, si sono successivamente accentuate generando agglomerati di materia strutturati che sono l'Universo che oggi osserviamo. Questa breve descrizione è affrontata più in dettaglio nel capitolo (A). Ci aspettiamo che il campo di fluttuazioni di densità iniziale sia random gaussiano, completamente descrivibile dallo spettro di potenza $P(|\vec{k}|)$. Come più approfonditamente descritto nel capitolo (A.2), si può considerare che lo spettro di potenza segua una legge di

potenza

$$P(k) = Ak^n \quad (2.8)$$

dove k è il numero d'onda ed n è l'indice spettrale e ci si aspetta che non sia costante in tutto l'intervallo di lunghezze d'onda, bensì che abbia i seguenti andamenti asintotici:

$$\begin{cases} n > -3 & \text{per } k \rightarrow 0 \\ n < -3 & \text{per } k \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2.9)$$

Per ottenere le condizioni iniziali che abbiano tale spettro di potenza primordiale, si dispongono i punti su una griglia regolare, e si fa loro compiere un piccolo spostamento in modo che le fluttuazioni abbiano lo spettro di potenza corretto. Vediamo meglio come. Si generano due numeri random ϕ e A , entrambi $\in (0, 1]$, per ogni punto del k -spazio. I coefficienti di Fourier del contrasto di densità (vedi paragrafo A.2) saranno:

$$\hat{\delta}_k = \sqrt{-2P(k) \ln(A)} e^{i2\pi\phi} \quad (2.10)$$

A questo punto, se \vec{q} sono le coordinate delle particelle nello spazio reale, possiamo calcolare il potenziale:

$$\Phi(\vec{q}) = \sum_k \frac{\hat{\delta}_k}{k^2} e^{i\vec{q}\vec{k}} \quad (2.11)$$

A questo punto si assegna la posizione e velocità iniziale delle particelle mediante uno spostamento dato dall'approssimazione di Zel'dovich (vedi Paragrafo per la descrizione dettagliata di tale approssimazione):

$$\vec{x} = \vec{q} - D_+(z) \vec{\nabla} \phi(\vec{q}) \quad (2.12)$$

$$\vec{v} = \dot{D}_+(z) \vec{\nabla} \phi(\vec{q}) \quad (2.13)$$

dove $D_+(z)$ è il fattore lineare di crescita delle perturbazioni al redshift z (paragrafo).

A questo punto si possono applicare le tecniche N-body ed idrodinamiche sopra descritte e cominciare l'esecuzione della simulazione. Ovviamente noi siamo interessati non solo a verificare che il risultato finale della simulazione dia una buona rappresentazione dell'Universo osservato, ma siamo anche interessati a vedere come si è giunti alla configurazione attuale. Per questo motivo, vogliamo un modo per seguire l'evoluzione dell'insieme di particelle che costituiscono la simulazione. Per far ciò vengono prese delle vere e proprie istantanee o *snapshot* della simulazione durante la sua evoluzione. Ovvero lo stato di tutte le componenti viene salvato. Abbiamo dunque diverse realizzazioni della nostra

simulazione che rappresentano le varie tappe evolutive. Questo ci permette di seguire nel tempo la formazione delle strutture, in quanto è come osservare diversi fotogrammi di un video. Ma ci consente anche di testare la bontà della simulazione (e quindi della fisica con cui è costruita, ad esempio valutando i parametri cosmologici utilizzati) non solo confrontandola con l'Universo vicino, ma anche spingendoci ad alti redshift, per verificare che la simulazione sia fedele lungo tutta la sua evoluzione.

2.5 | Le risimulazioni

Procedere come appena descritto comporterebbe in realtà un costo computazionale elevato, e per lo più sprecato nelle zone a bassissima densità dove non vi sono strutture. Per ovviare a questo si usa la tecnica delle *risimulazioni*. Si esegue una prima simulazione a bassissima risoluzione come descritto nei paragrafi precedenti. In questo modo alla fine si possono individuare grossi gruppi, che sono versioni a bassissima risoluzione delle strutture più grandi. Avrà quindi senso lavorare a risoluzioni maggiori solo in queste zone. Conoscendo le particelle che appartengono a queste strutture a bassa simulazione possiamo trovare la zona lagrangiana iniziale da cui si sono generate. Queste zone lagrangiane vengono ricostruite ad alta risoluzione e fatte evolvere come simulazioni a sé stanti.

Se ci limitassimo a questo riusciremmo a costruire versioni ad alta risoluzione delle strutture, ma perderemmo completamente le interazioni mareali con le zone limitrofe che sono state escluse. Per evitare questo, alla zona lagrangiana di partenza si aggiungono anche zone circostanti mantenendo però una risoluzione bassa. Infatti queste zone esterne servono solo a tener conto degli effetti mareali, ma non verranno poi studiate.

Il risultato finale sono tante simulazioni (quelle utilizzate nel presente lavoro di tesi sono 29) che sono risimulazioni delle zone di interesse. Ovviamente i vettori contenenti i dati di tutte le particelle contengono anche le particelle a bassa risoluzione che sono servite per le interazioni mareali. Tali particelle vengono dette *contaminanti*, e bisogna aver cura di scartarle prima di effettuare le analisi scientifiche.

2.6 | Identificazione delle strutture

Il risultato che otteniamo dall'esecuzione di una simulazione è un insieme di particelle a cui sono associate proprietà quali posizione e velocità ed eventuali altri parametri (temperatura, metallicità,...). Ma un insieme di milioni di particelle sarebbe totalmente inutile se

non avessimo un modo per riconoscere le strutture che hanno composto durante l'evoluzione temporale. Il compito di individuare le strutture all'interno di una simulazione viene svolto, nelle simulazioni usate per questo lavoro di tesi, da due procedure: FoF e Subfind.

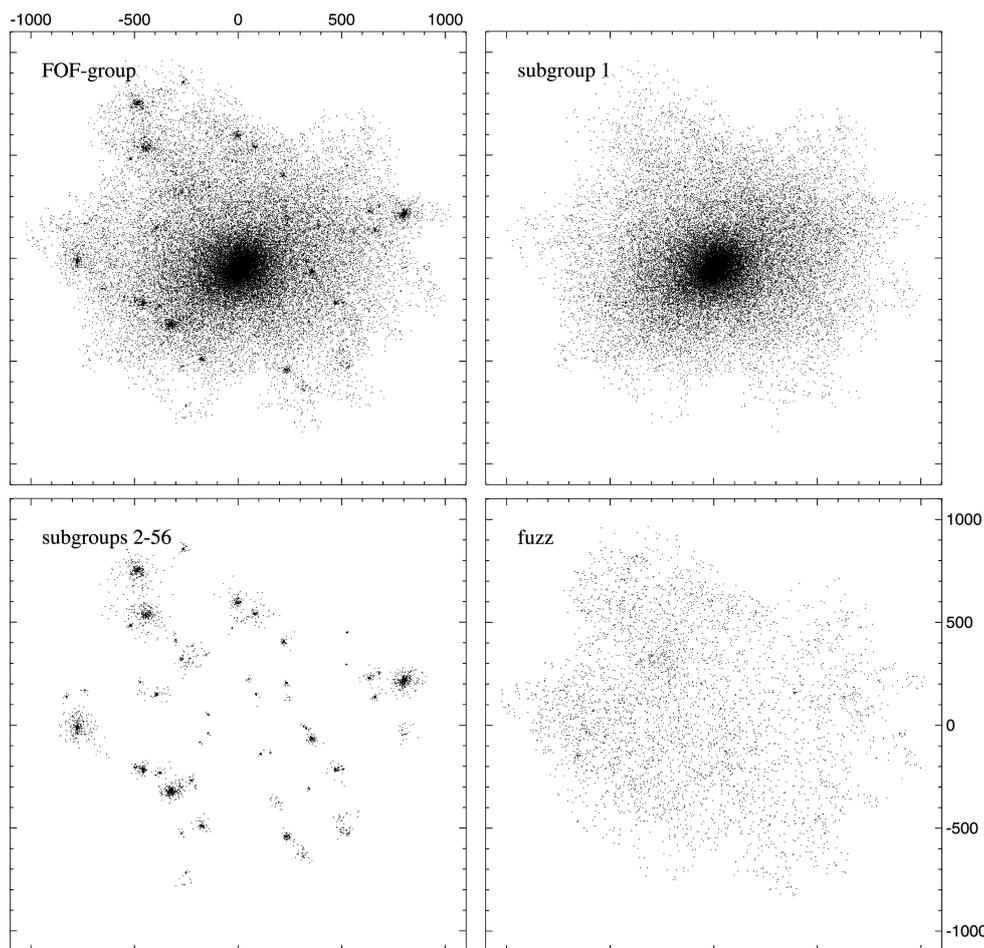


Figura 2.5: Esempio di identificazione di sottostrutture effettuato con Subfind. Il pannello in alto a sinistra rappresenta un intero gruppo Fof. Il pannello in alto a destra mostra l'alone principale, mentre in quello in basso a sinistra ci sono le sottostrutture. Infine nel pannello in basso a destra ci sono le particelle slegate. Da Springel et al. (2001)

Fof è un algoritmo *friends-of-friends*, che serve a fare una prima veloce scrematura delle particelle sulla base di principi geometrici. Una particella appartiene ad un gruppo Fof se è entro una certa distanza (*linking-length*) dalle altre particelle. In particolare nelle simulazioni da me utilizzate la *linking-length* è stata scelta pari a 0.2 volte la distanza media

delle particelle. Questa prima analisi serve ad individuare grossolanamente dei gruppi di particelle. L'analisi più accurata viene eseguita da Subfind. Tale algoritmo considera le particelle di un gruppo Fof e calcola il campo di densità delle particelle di tutte le specie utilizzando un kernel SPH come quello della formula (2.7). Infatti le sottostrutture possono essere viste come fluttuazioni del campo di densità del gruppo principale. Individuato il massimo del campo di densità, Subfind scende lungo il gradiente di densità trovando i massimi locali ed i corrispondenti minimi locali (vedi Figura 2.6). Può quindi tracciare superfici di isodensità che delimitano le candidate sottostrutture. Quella che contiene il maggior numero di particelle è quella dell'alone principale. Non si può però ancora parlare di sottostrutture vere e proprie, in quanto fin'ora è stata fatta solamente una scrematura spaziale. Una definizione fisica di sottostruttura è data dall'insieme di particelle gravitazionalmente legate. Immaginiamo ad esempio una galassia. Al suo interno vi può essere una particella ad alta velocità che non è gravitazionalmente legata, e che è destinata ad uscire. Subfind isola dunque le particelle appartenenti alle candidate sottostrutture ed elimina le particelle che hanno un'energia maggiore del massimo del potenziale della candidata sottostruttura. Ovvero elimina le particelle che non sono nella buca di potenziale locale. Le particelle scartate possono appartenere all'alone principale, o essere slegate anche da questo. L'ultimo passo è quindi escludere le particelle di energia positiva, che sono quelle slegate.

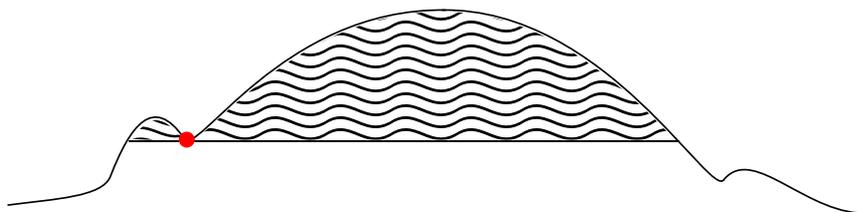


Figura 2.6: Campo di densità (raffigurazione bidimensionale) all'interno di un gruppo Fof. Subfind individua il massimo assoluto e discende il gradiente del campo di densità fino a trovare il primo minimo locale (punto rosso). Tracciando le superfici di isodensità Subfind individua due candidate sottostrutture, rappresentate dalla parte ombreggiata in questa figura.

Il risultato è un vettore contenente gli ID delle particelle che appartengono a strutture gravitazionalmente legate. Conoscendo quindi le particelle che compongono ogni sottostruttura, Subfind è in grado di calcolare informazioni quali la posizione e la velocità della

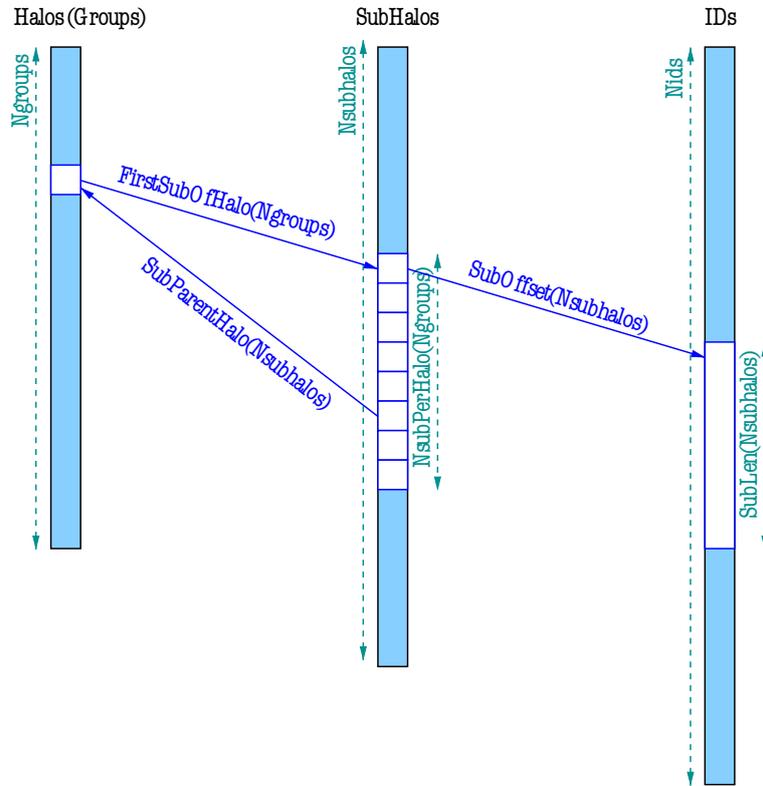


Figura 2.7: Schema di organizzazione dei vettori di dati in Subfind

struttura stessa, la massa, il momento angolare, il centro di massa ed altri parametri come r_{200} ed M_{200} (vedi Paragrafo (A.5) per la spiegazione di queste quantità). Le particelle sono organizzate nel vettore secondo la specie, in modo da poter sempre ricavare quali siano, ad esempio, le particelle di gas o quelle di DM.

In figura (2.7) riportiamo lo schema con cui Subfind organizza i dati. È sempre possibile sapere quali sottostrutture appartengono ad un alone, e quali particelle appartengono ad ogni sottostruttura, ed è possibile anche il processo inverso. Si capisce dunque l'importanza che rivestono questi algoritmi di identificazione delle sottostrutture. Le informazioni che producono mediante la riduzione dati sono quelle con cui viene fatta la maggior parte del lavoro di analisi dati. In figura (2.5), tratta da Springel et al. (2001), riportiamo un esempio di identificazione di sottostrutture effettuato con Subfind. Il pannello in alto a sinistra rappresenta un piccolo gruppo Fof contenente 44800 particelle. Subfind ha identificato 56 sottostrutture in questo gruppo, la più grande delle quali è l'alone principale che è

mostrato separatamente nel pannello in alto a destra. Le rimanenti 55 sottostrutture sono riportate nel pannello in basso a sinistra. Quello che rimane sono le particelle che non appartengono a nessuna struttura gravitazionalmente legata e sono riportate nel pannello in basso a destra.

Equilibrio dei sistemi non collisionali

La maggior parte della materia nell'Universo è *dark matter*. Tale materia è non collisionale, e pertanto è chiaro come lo studio dei sistemi non collisionali sia di estrema importanza. Come visto nel Capitolo A piccole fluttuazioni del campo di densità possono crescere a causa dell'attrazione gravitazionale della materia stessa. Ci si aspetterebbe che tutta la materia della perturbazione collassasse in una singolarità. In un fluido non collisionale non vi sono forze verso l'esterno, come la pressione per un fluido collisionale, che possano controbilanciare la forza di gravità che è solo attrattiva. Quello che vedremo in questo capitolo è che la DM riesce ad assumere configurazioni di equilibrio in virtù della propria dispersione di velocità che fornisce il supporto necessario a non far collassare il sistema.

3.1 | L'equazione non collisionale di Boltzmann

Una descrizione completa di un sistema non collisionale è data dalla *funzione di distribuzione* $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ che è la densità nello spazio delle fasi. Il numero di oggetti in un volume infinitesimo dello spazio delle fasi, ovvero il numero di oggetti che stanno nel volume d^3x centrato in \vec{x} e che hanno il vettore velocità che sta in un volume d^3v centrato in \vec{v} , sarà dato da

$$dn = f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3x d^3v \quad (3.1)$$

Per definizione sarà dunque $f \geq 0$ ovunque. Dato il determinismo della meccanica newtoniana, specificando la funzione di distribuzione ad un qualunque istante t_0 sarà dunque possibile conoscere la configurazione del sistema a un qualunque istante successivo.

Introduciamo il vettore posizione e velocità nello spazio delle fasi:

$$(\vec{x}, \vec{v}) \equiv \vec{w} \quad (3.2a)$$

$$\dot{\vec{w}} = (\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{v}}) = (\vec{v}, -\vec{\nabla}\Phi) \quad (3.2b)$$

dove Φ è il potenziale gravitazionale. Poichè stiamo trattando un fluido non collisionale, le particelle di tale fluido non varieranno improvvisamente la loro posizione nello spazio delle fasi come accadrebbe se vi fossero urti, cosicchè possiamo introdurre un'equazione di continuità per f analoga alla (A.22a) per ρ .

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^6 \frac{\partial(f\dot{w}_\alpha)}{\partial w_\alpha} = 0 \quad (3.3)$$

Poichè x_i e v_i sono coordinate indipendenti dello spazio delle fasi, abbiamo che

$$\sum_{\alpha=1}^6 \frac{\partial \dot{w}_\alpha}{\partial w_\alpha} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i} \right) = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (3.4)$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che il potenziale gravitazionale non dipende dalla velocità. Utilizzando quest'ultima equazione in (3.3) otteniamo l'**equazione non collisionale di Boltzmann**:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^6 \dot{w}_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} = 0 \quad (3.5)$$

Per meglio comprendere il significato di questa equazione richiamiamo il concetto di approccio lagrangiano ed euleriano, già visto nel Paragrafo 2.2:

Derivata lagrangiana : con questo approccio seguiamo un elemento di fluido e vediamo come varia $\rightarrow \frac{df}{dt}$

Derivata euleriana : con questo approccio dividiamo lo spazio con una griglia, e vediamo come variano le quantità del fluido in un dato punto fisso della griglia. $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}$

La derivata lagrangiana della funzione di distribuzione sarà pertanto

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^6 \dot{w}_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \quad (3.6)$$

L'equazione di Boltzmann (3.5) diventa allora:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = 0} \quad (3.7)$$

ovvero il fluido nello spazio delle fasi è *incomprimibile*.

Un'importante osservazione da fare riguarda la coesistenza di diverse specie di particelle. Se infatti ho diverse specie, ognuna deve soddisfare separatamente l'equazione non collisionale di Boltzmann. Questo infatti è quello che verrà fatto nel Paragrafo ??, dove guarderemo il comportamento delle particelle di DM e gas sia considerate come unica popolazione, sia separatamente.

3.2 | Le equazioni di Jeans

In questo paragrafo vedremo come sia possibile estrarre informazioni dall'equazione (3.7). Dato l'elevato numero di variabili (7) della funzione di distribuzione, procederemo prendendo i momenti dell'equazione sopra citata. In particolare, tale equazione può essere sviluppata nel seguente modo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) = 0 \quad (3.8)$$

Adottando la convenzione per cui indici ripetuti si intendono sommati, integriamo tale equazione su tutte le velocità:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3v + \int v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3v - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3v = 0 \quad (3.9)$$

Questa equazione può essere ulteriormente semplificata facendo le seguenti osservazioni.

- il volume dello spazio delle fasi su cui stiamo integrando (ovvero tutte le velocità) non dipende dal tempo, pertanto nel primo integrale la derivata temporale può essere portata fuori dall'integrale.
- Poichè v_i non dipende da x_i in quanto sono coordinate indipendenti dello spazio delle fasi, la derivazione $\partial/\partial x_i$ che compare nel secondo termine può essere portata fuori dall'integrale.
- Stiamo integrando su tutto il volume delle velocità, che è infinitamente grande. La superficie di tale volume è fatta da tutte le velocità pari ad ∞ . Il teorema della divergenza afferma che $\int_V \vec{\nabla} f d^3x = \int_S f \cdot \hat{n} d^2S$, dove \hat{n} è un versore normale all'elemento

d'area d^2S . L'ultimo termine della (3.9) diviene nullo applicando questo teorema (il volume di integrazione che compare nel teorema della divergenza in questo caso è da intendersi il volume delle velocità) poichè il numero di particelle con velocità pari ad ∞ è pari a 0.

Pertanto se definiamo la densità spaziale e la velocità media come segue

$$\nu \equiv \int f d^3v \quad \bar{v}_i \equiv \int f v_i d^3v \quad (3.10)$$

L'equazione (3.9) si riduce alla seguente:

$$\boxed{\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0} \quad (3.11)$$

Moltiplichiamo ora l'equazione (3.8) per v_j ed integriamo su tutte le velocità. Infine applicando il teorema della divergenza otteniamo

$$\boxed{\frac{\partial(\nu \bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0} \quad (3.12)$$

dove $\overline{v_i v_j} = \frac{1}{\nu} \int v_i v_j f d^3v$.

L'equazione (3.12) appena trovata può essere riscritta in un modo diverso che ci permetterà di fare un'importante osservazione. Facciamo dunque la seguente operazione:

$$(3.12) - \bar{v}_j (3.11) \quad (3.13)$$

ed introduciamo la seguente quantità:

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \quad (3.14)$$

Quello che si ottiene è l'equivalente dell'equazione di Euler (vedi eq. (A.22b))

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial(\nu \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i}} \quad (3.15)$$

L'aspetto interessante è dato dall'ultimo termine che è l'equivalente del termine di pressione dell'equazione di Euler. Il termine $-\nu \sigma_{ij}^2$ è chiamato *tensore di stress* e descrive una

pressione anisotropa. Come accennato nell'introduzione a questo capitolo, il campo di velocità della materia non collisionale può fornire un supporto analogo a quello dato dalla pressione per un fluido collisionale.

Le equazioni (3.11)-(3.12)-(3.15) sono un sistema di 7 equazioni. Il tensore di stress è simmetrico, ed è pertanto sempre possibile scegliere un sistema di riferimento in cui è diagonale. Le variabili indipendenti sono quindi le tre componenti del tensore di stress, il campo Φ , la densità ν e le tre componenti della velocità media \bar{v}_i . Ho quindi 8 incognite e 7 equazioni. Il problema maggiore dell'equazione (3.15) è che non esiste un'equazione di stato che colleghi il tensore di stress a ν . Per poter risolvere il sistema bisogna quindi fare delle assunzioni circa la forma di σ_{ij}^2 .

3.3 | Equilibrio di sistemi quasi sferici

In questo paragrafo studieremo un'applicazione delle leggi di Jeans trovate nel paragrafo precedente. Più precisamente troveremo una relazione che ci permette di capire se una certa popolazione di oggetti sia in equilibrio o meno. È facile capire l'importanza che riveste questo tipo di informazione. Come abbiamo visto nel Paragrafo A.5, una fluttuazione che si sia staccata dal flusso di Hubble si comporta come un Universo chiuso e sembrerebbe destinata a collassare in una singolarità, se non fosse per l'avvento di processi che instaurano un equilibrio. Nel paragrafo precedente abbiamo visto che per la materia non collisionale c'è il supporto del campo di velocità che fa le veci di una pressione. Ci si aspetta dunque che una struttura cosmica oggi in equilibrio non lo sia stata nel passato. Mediante una relazione che ci permette di identificare strutture in equilibrio possiamo pertanto testare la teoria del collasso. Data l'importanza che tale relazione avrà nel seguito, per semplificare essa sarà chiamata *Equazione di Jeans*, sebbene sia una formula derivata dalle equazioni di Jeans.

Consideriamo l'equazione (3.5) scritta in coordinate sferiche (rimandiamo a Binney e Tremaine (1987) per la derivazione completa). Prendendo i momenti dell'equazione così ottenuta ricaviamo l'analogo della (3.15) scritta in coordinate sferiche. Poiché vogliamo studiare un sistema in equilibrio, imponiamo che il sistema sia in stato stazionario, ovvero $\bar{v}_r = \bar{v}_\theta = 0$:

$$\frac{d(v\bar{v}_r^2)}{dr} + \frac{v}{r} \left[2\bar{v}_r^2 - (\bar{v}_\theta^2 + \bar{v}_\phi^2) \right] = -v \frac{d\Phi}{dr} \quad (3.16)$$

Imponiamo ora un'ulteriore condizione, ovvero che il sistema sia invariante per rotazione attorno al centro. Questo vuol dire che da qualunque punto osserviamo il sistema vediamo, statisticamente parlando, le stesse strutture di densità e velocità. Abbiamo quindi

$$\bar{\sigma}_\theta^2 = \bar{\sigma}_\phi^2 \quad (3.17)$$

dove abbiamo introdotto la dispersione in luogo della velocità per maggior generalità. Infatti nel caso in cui il sistema di riferimento sia tale per cui non è soddisfatta la condizione $\bar{v}_r = \bar{v}_\theta = 0$, calcolare la dispersione di velocità è equivalente a mettersi nel sistema di riferimento in cui vale la relazione appena citata. Possiamo allora definire il **parametro di anisotropia**:

$$\beta = 1 - \frac{\sigma_t^2}{\sigma_r^2} \quad (3.18)$$

dove σ_t indica la componente tangenziale, senza bisogno di precisare quale delle due sia in virtù della relazione (3.17). Il parametro β è un indicatore del livello di anisotropia delle orbite. Tale anisotropia può essere dovuta a diversi processi che hanno agito sulle nostre osservabili. Pensiamo ad esempio ad attriti col gas, fenomeni di frizione dinamica (una sorta di viscosità riguardante la DM), fenomeni mareali, infall. Studiare l'anisotropia di un sistema serve dunque a capire quali processi, e in quale misura, hanno agito. Generalmente le strutture cosmiche si formano per il collasso delle perturbazioni ed è quindi lecito aspettarsi che la componente radiale della dispersione di velocità sia maggiore di quella tangenziale. Possiamo dunque riscrivere l'equazione (3.16):

$$\frac{1}{v} \frac{d(v\sigma_r^2)}{dr} + 2\frac{\beta\sigma_r^2}{r} = -\frac{d\Phi}{dr} \quad (3.19)$$

Sostituendo l'espressione per il potenziale $d\Phi/dr = GM(r)/r^2$ si ottiene

$$\boxed{M(r) = -\frac{r\sigma_r^2}{G} \left(\frac{d \ln v}{d \ln r} + \frac{d \ln \sigma_r^2}{d \ln r} + 2\beta \right)} \quad \text{Equazione di Jeans} \quad (3.20)$$

Le particelle che soddisfano questa equazione sono dunque in equilibrio. Ma tale equazione può anche essere letta nel seguente modo: particelle in equilibrio sono dei traccianti del potenziale, in quanto con la loro dinamica posso ricostruire il potenziale.

3.4 | Il teorema del viriale

Nei precedenti paragrafi abbiamo ricavato delle relazioni per le quantità dello spazio delle fasi. Abbiamo lavorato cioè con tutte le particelle componenti il sistema. Anche se riuscissimo a risolvere esattamente le equazioni (3.11)-(3.12)-(3.15), ci troveremmo con una quantità di informazioni estremamente grande, mentre risulta più utile un'informazione sulle proprietà globali del sistema. Questo ricorda la trattazione termodinamica, dove partendo dalla dinamica delle particelle si vuole estrarre informazioni macroscopiche quali la temperatura, pressione, ecc... Questo è proprio quello che faremo in questo paragrafo, trovando un'equazione che lega proprietà globali del sistema come l'energia cinetica e l'energia potenziale.

Fin da quando abbiamo introdotto la funzione di distribuzione, abbiamo usato la definizione per f di numero di particelle in un volume infinitesimo dello spazio delle fasi. Tuttavia si sarebbe potuto scegliere un'altra definizione. Ad esempio la luminosità o la massa contenuta in tale volume. Per quanto segue infatti la usiamo intesa come massa contenuta nel volume dello spazio delle fasi, e pertanto possiamo identificare ν con ρ . Se ora moltiplichiamo la (3.12) per x_k e poi integriamo sulle variabili spaziali otteniamo

$$\int x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_j)}{\partial t} d^3x = - \int x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} d^3x - \int \rho x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3x \quad (3.21)$$

L'ultimo termine è chiamato **tensore dell'energia potenziale** W_{jk} . Assumendo che la densità vada a 0 per distanze infinite, per il teorema della divergenza applicato al primo termine del lato destro dell'equazione abbiamo:

$$\int x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_j)}{\partial t} d^3x = - \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3x = 2K_{jk} \quad (3.22)$$

dove K_{jk} è il **tensore dell'energia cinetica**. Tale tensore può essere scomposto in due termini utilizzando l'equazione (3.14):

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2}\Pi_{jk} \quad (3.23)$$

con

$$T_{jk} = \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3x \quad (3.24a)$$

$$\Pi_{jk} = \int \rho \sigma_{jk}^2 d^3x \quad (3.24b)$$

Chiamiamo A_{jk} il primo termine dell'equazione (3.22), e facciamo la seguente operazione di media:

$$\frac{A_{jk} + A_{kj}}{2} \quad (3.25)$$

Poichè x_k non dipende dal tempo possiamo portare fuori dall'integrale in A_{jk} la derivata temporale, e poichè i tensori W_{jk} , T_{jk} e Π_{jk} sono simmetrici, dall'operazione di media sugli indici otteniamo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3x = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \quad (3.26)$$

Se ora definiamo il **tensore momento di inerzia** nel seguente modo

$$I_{jk} = \int \rho x_j x_k d^3x \quad (3.27)$$

si può dimostrare che (la dimostrazione, qui omessa, è riportata in Binney e Tremaine (1987))

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3x \quad (3.28)$$

Combinandola con la (3.26) otteniamo il **teorema del viriale in forma tensoriale**:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \quad (3.29)$$

Se ora facciamo la traccia delle equazioni (3.24) notiamo che $Tr(T) + Tr(\Pi)/2 = K =$ energia cinetica. Inoltre si può dimostrare che la traccia di W_{ij} è l'energia potenziale del sistema. Se imponiamo che il sistema sia in uno stato stazionario abbiamo che la derivata seconda del momento di inerzia è nulla e quindi otteniamo

$$\boxed{2K + W = 0} \quad \text{Teorema del viriale} \quad (3.30)$$

3.4.1 L'energetica del collasso

In virtù della (3.30) abbiamo che se E è l'energia meccanica totale di un sistema allora

$$E = K + W = -K = \frac{1}{2}W \quad (3.31)$$

Immaginiamo ora di avere un sistema inizialmente infinitamente esteso e a riposo, per cui

$$E_{in} = K_{in} = W_{in} = 0 \quad (3.32)$$

Il sistema poi collasserà e raggiungerà una situazione di equilibrio. In questa fase il sistema è legato e pertanto avrà

$$0 < E_f = -K_f = W_f/2 \quad (3.33)$$

Metà dell'energia potenziale va ad aumentare l'energia cinetica del sistema e l'altra metà viene irradiata: il sistema infatti per essere legato dovrà avere un'energia totale minore di quella di partenza. Il sistema risultate avrà dunque un'energia di legame pari all'energia cinetica:

$$E_b = -E = K \quad (3.34)$$

3.5 | Il rilassamento violento

Consideriamo il processo di collasso di una perturbazione iniziale che porta alla formazione di una struttura cosmica come, ad esempio, un ammasso. Durante il collasso il potenziale gravitazionale Φ varia drasticamente (a questa variazione rapida è dovuto il nome di rilassamento violento). L'energia meccanica totale per unità di massa ϵ cambierà di conseguenza:

$$\epsilon = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(r, t) \quad (3.35)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \dot{r} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (3.36)$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dall'equazione del moto $\dot{\vec{v}} = -\vec{\nabla}\Phi$. Pensiamo ad una situazione di formazione come quella illustrata nel Paragrafo 3.4.1, dove il sistema inizialmente ad energia nulla collassa e raggiunge una situazione di equilibrio dato dal teorema

del viriale. Poichè l'equazione del moto di una particella nel potenziale gravitazionale dell'ammasso è indipendente dalla massa (vedi equazione (3.36)), l'equilibrio è indipendente dalla massa. Si può dimostrare (Sarazin (1986)) che all'equilibrio la funzione di distribuzione è data dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann

$$f(\vec{r}, \vec{v}) \propto \exp\left(-\frac{\epsilon}{\sigma_r^2}\right) \quad (3.37)$$

Tale distribuzione nello spazio delle fasi produce una distribuzione delle velocità gaussiana, ed è indipendente dalla massa. Notiamo che una distribuzione come la (3.37) darebbe una massa infinita. Tuttavia essa vale solo nelle zone in cui si è instaurato l'equilibrio, per cui a grandi distanze dal centro dell'ammasso non è più valida.

3.6 | Frizione dinamica

Considerando strutture di sola DM non ci si aspetterebbero fenomeni di attrito, in quanto tale componente è non collisionale. Un attrito viscoso, come quello che avremmo in presenza di gas, in effetti non agisce sulla componente di materia oscura. Tuttavia agisce un meccanismo che produce effetti analoghi a quelli del classico attrito fluidodinamico, sebbene abbia una natura totalmente differente. Tale meccanismo prende il nome di *frizione dinamica*. In questo paragrafo vedremo quali sono i processi che danno luogo a questo fenomeno, mentre nel capitolo ?? invocheremo la frizione dinamica per spiegare alcuni fenomeni osservati nelle simulazione analizzate.

Vogliamo studiare le forze che agiscono su un corpo di massa M immerso in una popolazione di particelle non collisionali di massa m . Consideriamo innanzitutto l'interazione tra il corpo M ed una singola particella di massa m . Tali oggetti e si muovono di moto rettilineo uniforme ed hanno parametro d'impatto b . Se ora ci mettiamo nel sistema di riferimento di M vedremo una situazione come quella di figura 3.1. È facile calcolare la variazione della componente parallela e perpendicolare della velocità. Ometteremo i conti (si possono trovare in Binney e Tremaine (1987)), e ci concentreremo sul risultato e sulle sue implicazioni.

Poichè la forza gravitazionale è solo attrattiva, la velocità di M subirà una variazione di velocità negativa nel senso del moto. Se ora pensiamo di immergere M in un mare di particelle m , possiamo pensare che le componenti della variazione di velocità perpendicolari al moto si medino a zero. Quello che rimane è una variazione di velocità negativa nel senso

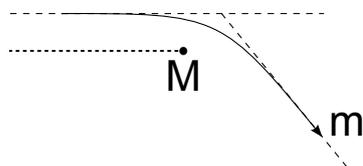


Figura 3.1: Schema dell'interazione gravitazionale tra due corpi.

del moto, ovvero una decelerazione. Il corpo M sente quindi l'equivalente di una forza di resistenza che agisce nel verso del suo moto. Questa forza è chiamata **frizione dinamica**, ed ha la seguente espressione:

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = -\frac{4\pi \ln(\Lambda)G^2\rho M}{v_M^3} \left[\operatorname{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}e^{-X^2}} \right] \vec{v}_M \quad (3.38)$$

Struttura e dinamica degli ammassi di galassie

Gli ammassi di galassie sono i sistemi virializzati più grandi che osserviamo nell'Universo. Principalmente essi sono costituiti di dark matter, che costituisce circa l'80% della loro massa totale (Rasia, Tormen e Moscardini (2004)). Questa componente non è direttamente osservabile, e pertanto ci serve uno strumento che permetta di confrontare le osservazioni con i modelli teorici. Le simulazioni sono attualmente uno strumento efficace per questo confronto. Possiamo infatti studiare il comportamento della componente oscura così come della materia barionica. Siamo quindi in grado di capire in che modo dagli osservabili possiamo trarre informazioni sulla distribuzione di tutta la materia, così come capire quali processi dinamici agiscono all'interno degli ammassi.

4.1 | L'azione dello stripping mareale

La densità numerica normalizzata alla densità numerica entro il raggio viriale ci dà una prima idea della differenza che intercorre tra la distribuzione della DM e quella delle sottostrutture. Infatti, come vedremo meglio in seguito, è al centro di quest'ultime che pensiamo ci siano le galassie, ovvero gli osservabili. In Figura 4.1 osserviamo un tipico andamento (vedi Diemand, Moore e Stadel (2004), Gao et al. (2004), Ghigna et al. (1998), Nagai e Kravtsov (2005), Gao et al. (2008)) dove si può notare l'appiattimento a piccole distanze dal centro della distribuzione delle sottostrutture rispetto alla DM.

Il meccanismo di distruzione mareale può essere utilizzato per spiegare queste differenze. Tale meccanismo è più efficace nelle zone interne (vedi lavori sopra citati) e questo porta

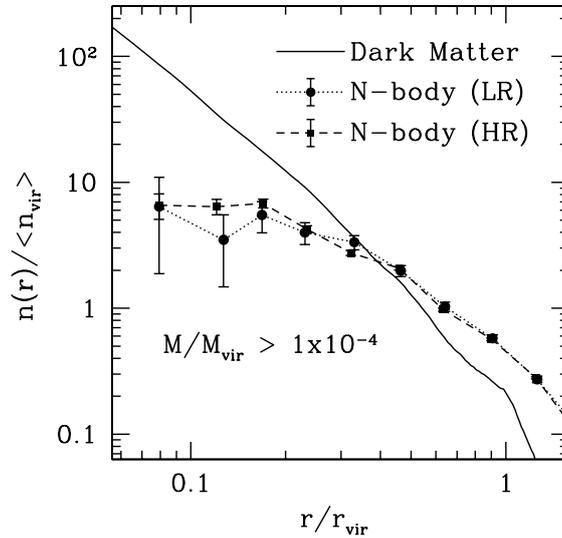


Figura 4.1: Profilo radiale della densità numerica normalizzata alla densità numerica entro il raggio viriale. La linea continua rappresenta la dark matter, mentre i punti sono le sottostrutture, estratte da due run a diversa risoluzione. Da Nagai e Kravtsov (2005)

ad una differenza rispetto alla distribuzione del background. Il profilo delle sottostrutture risulta essere ben tracciato da un profilo isoterma con un core (Diemand, Moore e Stadel (2004)):

$$n(r) = 2n_H[1 + (r/r_H)^2]^{-1} \quad (4.1)$$

dove n_H è la densità numerica relativa ad un raggio scala r_H , che risulta essere pari a $0.37r_{vir}$. La distribuzione della densità numerica della DM è invece ben rappresentata da un profilo Navarro-Frenk-White (Navarro, Frenk e White (1996), Ghigna et al. (1998), Rasia, Tormen e Moscardini (2004)), NFW nel seguito:

$$n(r) = \frac{n_0}{(cr/r_{200})(1 + cr/r_{200})^2} \quad (4.2)$$

dove c è il parametro di concentrazione.

Il meccanismo di distruzione mareale presenta numerose conferme. Diemand, Moore e Stadel (2004) hanno studiato la dispersione di velocità per sei cluster simulati. In Figura 4.2 riportiamo la dispersione di velocità 3D ed il parametro di anisotropia trovato dagli autori. Possiamo notare come fino a $0.4r_{vir}$ le sottostrutture abbiano una dispersione 3D maggiore delle particelle di DM di background. Se definiamo un parametro di *bias* $b = \sigma_{sub}/\sigma_{DM}$ per poter valutare le differenze tra il comportamento della dark matter e delle sottostrutture,

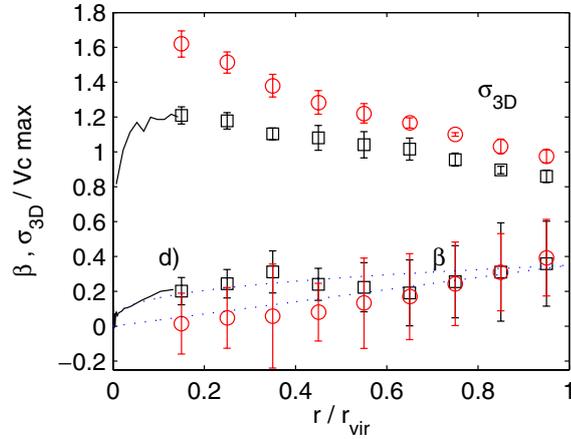


Figura 4.2: Dispersione di velocità 3D per le sottostrutture (cerchi) e per la DM (quadrati) in funzione della distanza dal centro dell'ammasso. I dati sono ottenuti come media tra 6 simulazioni. Viene mostrato anche il profilo del parametro di anisotropia. Viene qui usata una definizione leggermente diversa: $\beta = 1 - 0.5\sigma_t^2/\sigma_r^2$. Da Diemand, Moore e Stadel (2004)

per i dati di Figura 4.2 si trova $b = 1.25 \pm 0.08$ entro $0.4r_{vir}$. Entro il raggio viriale abbiamo invece $b = 1.11 \pm 0.04$. In particolare gli autori sottolineano che il bias è indipendente dalla massa dei sub. Infatti selezionando solo le sottostrutture che risiedevano in un certo range di massa, gli autori hanno trovato valori quasi uguali del parametro di bias. I valori del parametro di bias sono sostanzialmente in accordo con quanto trovato in Gill et al. (2004). Per quanto riguarda il parametro β (vedi paragrafo 3.3), possiamo notare come esso suggerisca che le orbite siano leggermente tangenziali, con le particelle di DM leggermente più radiali delle sottostrutture. All'aumentare della distanza dal centro le orbite, sia della DM che delle sottostrutture, tendono a divenire più radiali. Analoghi risultati sono stati ottenuti in Gill et al. (2004).

In Figura 4.3 notiamo che la distribuzione di velocità della DM ha un profilo maxwelliano (vedi paragrafo 3.5), mentre le sottostrutture presentano un eccesso alle alte velocità. Le sottostrutture lente restano infatti più tempo nelle zone interne dell'alone, dove le perturbazioni mareali sono più intense, e pertanto subiscono per più tempo l'azione mareale e vengono distrutte. Da cui il minor numero di sottostrutture a bassa velocità. Questo ben si raccorda con le considerazioni fatte per il profilo di Figura 4.1. Tale meccanismo ci consente anche di spiegare la maggior dispersione di velocità delle sottostrutture rispetto alla DM nelle zone interne vista in Figura 4.2: gli aloni più veloci restano meno nelle zone

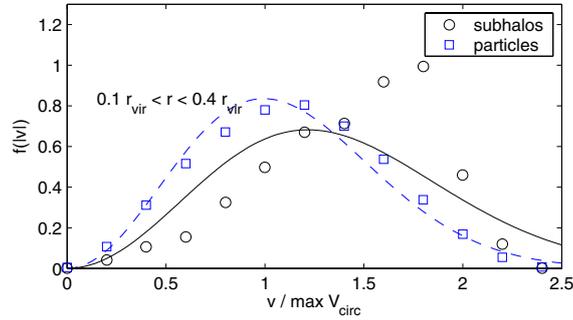


Figura 4.3: Distribuzione di velocità per le sottostrutture (cerchi) e per le particelle di DM (quadrati). Le velocità sono normalizzate alla velocità circolare massima di ogni cluster. Da Diemand, Moore e Stadel (2004)

interne e pertanto sono meno soggetti alla distruzione mareale.

Tale distruzione avviene mediante lo stripping di materia principalmente nelle zone esterne della sottostruttura. Ghigna et al. (1998) hanno infatti trovato una correlazione tra la dimensione delle sottostrutture e la loro posizione. In particolare tali dimensioni decrescono muovendosi verso il centro dell'ammasso. Questo fenomeno risulta ben evidente a $z=0$ ma meno a $z=0.5$ poichè le strutture in accrescimento risiedono nelle parti esterne dell'alone dove le forze mareali sono meno intense.

Nagai e Kravtsov (2005) hanno condotto uno studio per determinare la perdita di massa dovuta allo stripping mareale. In Figura 4.4 gli autori hanno rappresentato la perdita di massa frazionaria e il cambiamento in v_{max}^5 subita dalle sottostrutture dall'epoca in cui hanno raggiunto la massa massima M_{max} . Nonostante il grande scatter, dovuto all'eterogeneità delle strutture del campione, osservando le quantità mediate si nota un chiaro trend di perdita di massa a piccoli raggi. Definiamo l'epoca di accrescimento come il momento in cui la distanza di una sottostruttura dal progenitore più massivo dell'ammasso diventa per la prima volta minore di 1.5 volte il raggio viriale a quell'epoca. Possiamo osservare che gli aloni entro $0.3r_{\text{vir}}$ hanno in media perso più del 70 % della loro massa dall'accrescimento. A distanze maggiori di metà raggio viriale gli aloni in media perdono meno del 40% della loro massa. Dal grafico sopra citato possiamo anche notare che la perdita in massa è accompagnata da una decrescita in v_{max} . Questo è importante nel momento in cui si selezionano delle strutture sulla base della loro massa. Il campione è infatti affetto da un bias radiale dovuto a questa differente perdita di massa. Poichè in Figura 4.4 è illustrata

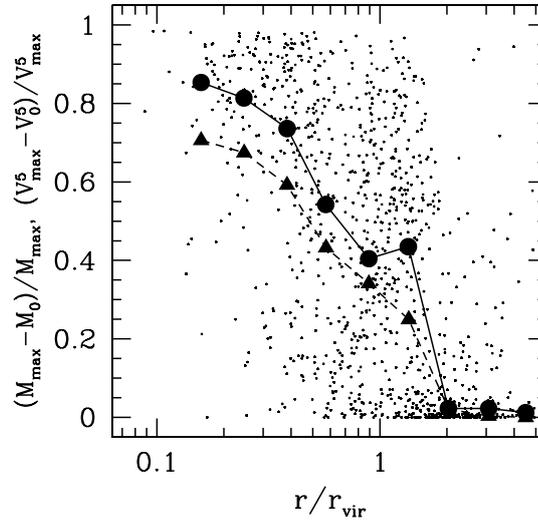


Figura 4.4: Perdita frazionaria di massa e dipendenza radiale di v_{max}^5 , tra le epoche in cui ogni sottostruttura ha raggiunto la massa massima M_{max} e $z=0$. I punti sono i valori di perdita di massa dei singoli subaloni, mentre i cerchi grossi mostrano il valore mediano nel bin. I triangoli sono la mediana dei valori del cambiamento nella quinta potenza della velocità massima. Da Nagai e Kravtsov (2005)

la variazione della quinta potenza di v_{max} , possiamo capire come v_{max} sia meno sensibile allo stripping mareale. Pertanto selezionare le strutture in base a v_{max} permette di avere un campione meno affetto da tale bias. In Figura 4.5 si vede infatti come selezionando il campione in base alla velocità abbiamo un accordo migliore col profilo di DM rispetto alla selezione basata sulla massa. Questo effetto è meno visibile, anche selezionando in massa, se andiamo all'epoca dell'accrescimento, poichè non ci sono stati ancora fenomeni di stripping. Un certo bias nelle zone più interne è ancora presente in quanto in queste zone l'azione di distruzione mareale è molto intensa. Gli autori osservano anche che M_{max} è circa 20-30% maggiore della massa all'accrescimento, indicando che le sottostrutture perdono massa anche prima dell'accrescimento entro la regione virializzata. Tutto ciò mette in evidenza la dipendenza radiale del meccanismo di stripping.

Un evidente esempio del meccanismo di distruzione mareale è visibile in Figura 4.6 dove gli autori (Gill et al. (2004)) hanno rappresentato il numero di sottostrutture entro il raggio viriale dei rispettivi aloni al tempo di formazione, in funzione del tempo, distinguendo il numero di sottostrutture entrate nell'alone (linea sottile) ed il numero di

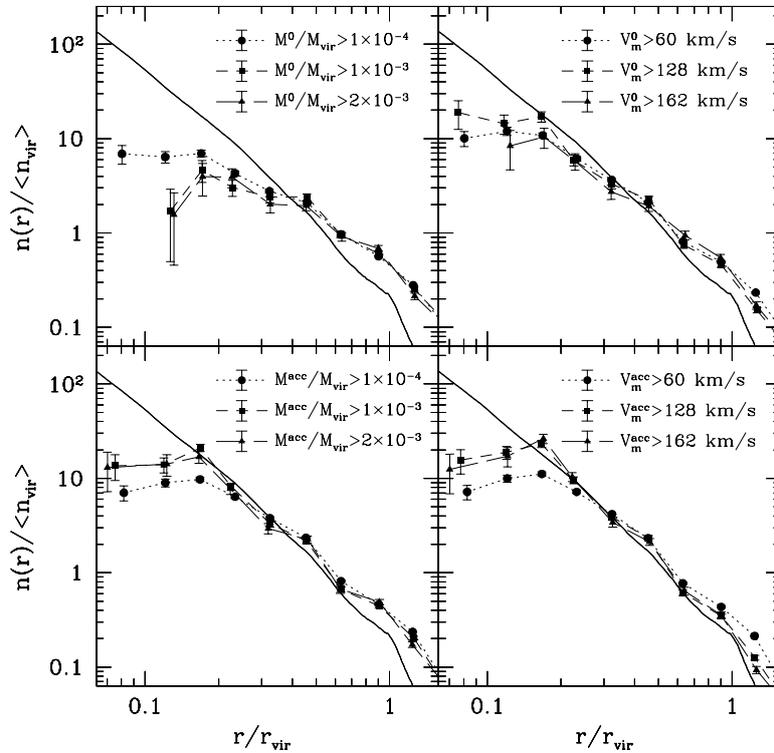


Figura 4.5: Distribuzione radiale delle sottostrutture per campioni selezionati con diversi criteri. *Pannelli superiori:* le sottostrutture sono selezionate usando i valori attuali della massa totale delle sottostrutture M^0 (a sinistra) e della massima velocità circolare v_m^0 (a destra). *Pannelli inferiori:* Le sottostrutture sono selezionate utilizzando la massa M^{acc} (a sinistra) e la massima velocità circolare v_m^{acc} all'epoca dell'accrescimento. Da Nagai e Kravtsov (2005)

sottostrutture effettivamente sopravvissute (linea spessa). Possiamo notare come sistematicamente le strutture sopravvissute siano in costante diminuzione rispetto al numero totale di sottostrutture. Infatti maggiore è il tempo trascorso nell'alone e più a lungo hanno agito i meccanismi di distruzione mareale. Gli autori evidenziano il fatto che non vi sembra essere una forte correlazione tra il tasso di distruzione e la massa o l'età di formazione dell'alone principale. Infatti in Figura 4.7 riportano il rapporto tra il numero di sottostrutture distrutte e il numero totale di sottostrutture entro il raggio viriale dei rispettivi aloni, in funzione del tempo. Le curve suggeriscono un andamento comune per tutti gli aloni analizzati, e la pendenza di tale andamento può essere interpretata come il tasso di distruzione delle sottostrutture.

Gli autori hanno condotto uno studio sul tipo di orbite delle sottostrutture. Quello che emerge dalla loro analisi è che le sottostrutture distrutte risiedono preferenzialmente su orbite circolari, mentre quelle che sopravvivono hanno eccentricità maggiori. Poiché i pericentri di entrambi i tipi di sottostrutture sono molto simili, l'orbita maggiormente circolare delle sottostrutture distrutte implica che quest'ultime restino più tempo nelle regioni interne dove l'azione di distruzione mareale è più intensa.

Quanto fin'ora discusso riguarda simulazioni di sola DM. Andremo invece ora a vedere cosa cambia inserendo la componente barionica, ovvero gas e stelle. In Rasia, Tormen e Moscardini (2004) gli autori testano la bontà del profilo NFW (equazione (4.2)) con l'introduzione del gas. L'effetto risultante dall'introduzione di questa componente è di concentrare maggiormente la distribuzione. Il parametro c aumenta di circa il 10% ($c_{DM} \simeq 6.0$, $c_{SPH} \simeq 6.5$), valore comparabile alla frazione barionica della simulazione. In Dolag et al. (2009) viene confermato questo risultato, e si sottolinea come l'introduzione del raffreddamento dovuto a processi radiativi aumenti ulteriormente la concentrazione. La spiegazione di questo incremento nella concentrazione può essere trovata nel diverso contenuto energetico di DM e gas. Durante l'accrescimento nel cluster, la natura collisionale dell'ICM diminuisce il tasso di infall del gas rispetto a quello della DM. A causa di questo ritardo, il gas sente un campo gravitazionale leggermente più intenso e quindi acquisisce un'energia ulteriore a spese della DM. L'energia persa dalla DM permette all'alone di comprimersi ulteriormente ed aumentare quindi la concentrazione rispetto al caso puramente non collisionale. Gli autori evidenziano come con l'aggiunta del gas la NFW descriva in modo addirittura migliore la densità numerica. Eventuali allontanamenti dal profilo NFW che si possono riscontrare non sono da imputare quindi all'aggiunta del gas, ma al venir meno delle condizioni sotto cui è stata costruita la NFW, ovvero sistema rilassato ed isolato.

Gao et al. (2004) hanno utilizzato simulazioni studiando il comportamento della DM, delle sottostrutture e delle galassie. In Figura 4.9 vediamo i plot della densità numerica e della dispersione di velocità, sia 3D che lungo la linea di vista. Notiamo come le galassie risultino essere dei traccianti della distribuzione di materia migliori rispetto alle sottostrutture. Infatti, sebbene le galassie si formino nelle buche di potenziale delle sottostrutture di DM, dobbiamo tener conto del fatto che lo stripping mareale agisce sulle parti esterne di una sottostruttura. In tali zone viene pertanto strappata la DM, mentre la galassia, che risiede nella parte centrale ed è pertanto maggiormente legata, risente poco di questi effetti. Alla stessa conclusione giunge lo studio di Nagai e Kravtsov (2005). In questo lavoro gli autori hanno trovato la correlazione tra la massa stellare e la massa della sottostruttura in

cui risiede la componente barionica: $M_* \propto M_{tot}^\alpha$ con $\alpha \simeq 1 - 1.5$.

In Figura 4.8 è chiaramente visibile questo andamento. Notiamo che le galassie che stanno nella parte interna dell'ammasso (pallini pieni nel grafico) popolano la regione superiore del plot. Cioè per una data massa stellare, la massa totale della sottostruttura mediamente diventa più piccola nelle regioni interne. Questo trend sistematico conferma le conclusioni di Gao et al. (2004): le sottostrutture perdono massa dalle regioni esterne composte di DM, mentre la perdita di massa della parte stellare, che è più interna e quindi più legata, è minore.

Gill et al. (2004) hanno effettuato uno studio sull'evoluzione dei parametri orbitali delle sottostrutture. I risultati che ottengono mostrano un chiaro trend di circolarizzazione delle orbite nel tempo. Sebbene un tale comportamento potrebbe far pensare all'azione della frizione dinamica, gli autori hanno fatto un test che sembrerebbe indicare che il meccanismo della frizione dinamica non sia il responsabile della circolarizzazione. Infatti tale frizione dipende dalla densità locale del background, ma selezionando sottostrutture a differenti pericentri non si è notato alcun cambiamento nell'evoluzione dell'eccentricità. Gli autori imputano la circolarizzazione alla crescita secolare di massa dell'alone principale. In risposta a tale variazione la velocità e l'orbita potrebbe cambiare. Gli autori fanno inoltre notare che tale affermazione è da sottoporre ad ulteriori test, tuttavia nel medesimo lavoro mettono in luce come effettivamente la velocità delle sottostrutture sia legata alla massa dell'alone principale. Infatti trovano che la dispersione di velocità delle sottostrutture è legata alla massa entro il raggio viriale dell'alone dalla relazione $\sigma \sim M_{vir}^{1/3}$ (confermata anche in Biviano et al. (2006)), come ci si aspetta dal teorema del viriale.

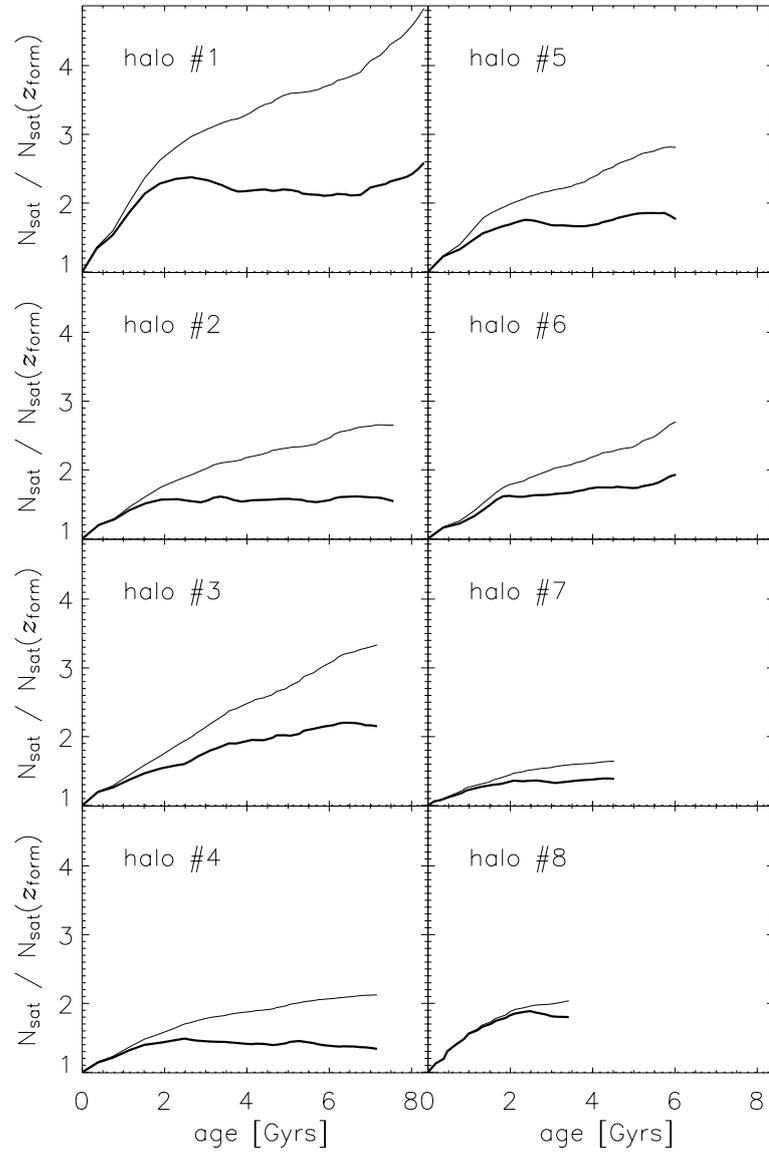


Figura 4.6: Numero di sottostrutture entro il raggio viriale dei rispettivi aloni al tempo di formazione, in funzione del tempo. La linea sottile è il numero di sottostrutture entrate nell'alone, mentre la linea spessa mostra il numero di sottostrutture sopravvissute. Da Gill et al. (2004)

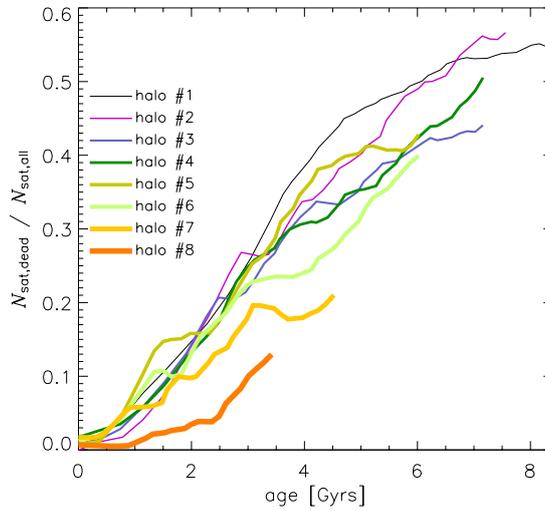


Figura 4.7: Rapporto tra il numero di sottostrutture distrutte e il numero totale di sottostrutture entro il raggio viriale dei rispettivi aloni, in funzione del tempo. L’inizio dell’asse temporale corrisponde all’epoca di formazione dell’alone. Da Gill et al. (2004)

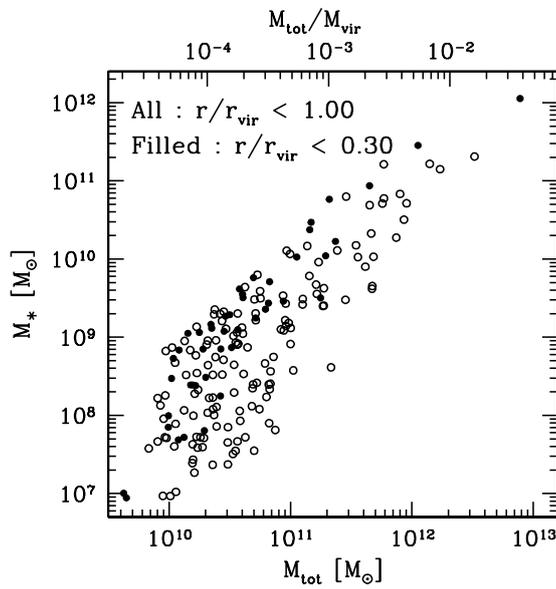


Figura 4.8: Massa in stelle in funzione della massa totale delle sottostrutture entro r_{vir} (tutti i cerchi) ed entro $0.3r_{\text{vir}}$ (cerchi colorati). Da Nagai e Kravtsov (2005)

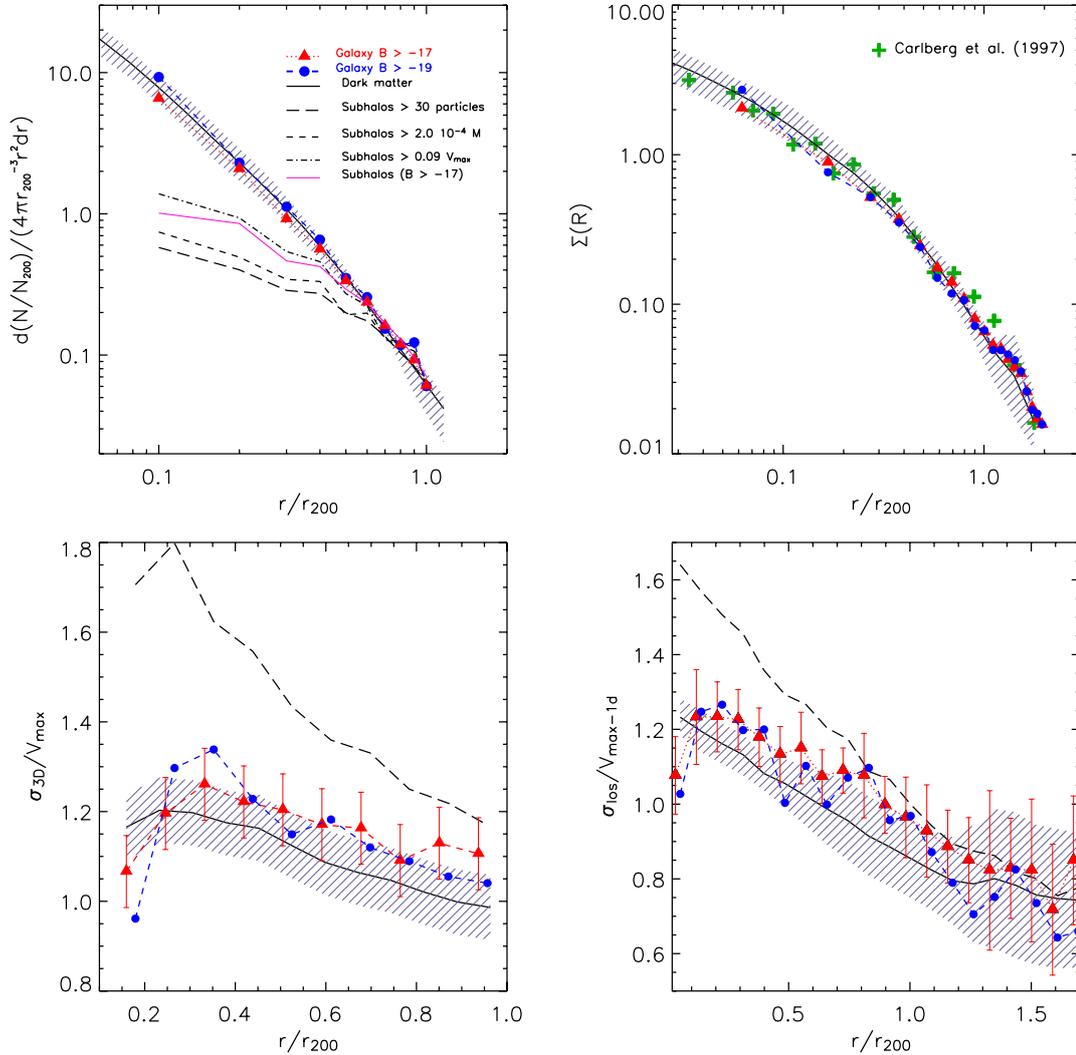


Figura 4.9: *In alto a sinistra:* profili radiali medi per la DM (linea continua), per galassie con due differenti limiti in magnitudine (simboli) e per differenti campioni di sottostrutture. *In alto a destra:* profili di densità superficiale media proiettata per la DM (linea continua) e per galassie con due differenti limiti in magnitudine (linee tratteggiate e punteggiate). I simboli rappresentano il profilo di densità media osservato di galassie nella CNOC survey (vedi Gao et al. (2004)). *Pannelli inferiori:* profilo di dispersione di velocità 3D (a sinistra) e lungo la linea di vista (a destra) per la DM (linea continua), per le sottostrutture (linea tratteggiate) e per galassie con due differenti limiti in magnitudine. In questi pannelli la regione ombreggiata rappresenta lo scatter nel profilo della DM. Da Gao et al. (2004)

4.2 | Formazione degli aloni

La formazione degli aloni di dark matter è caratterizzata da due fasi (Gill et al. (2004)). La prima corrisponde ad una rapida crescita della massa dell'alone, indice di un *major merger*, ovvero due aloni di massa comparabile che coalescono. Questo periodo viene definito *violento*. La seconda fase è di rilassamento, in cui molte strutture più piccole fanno merging e il sistema si porta verso un equilibrio viriale. Questo periodo viene definito *calmo*. In Figura 4.10 è rappresentata la frazione di massa componente i satelliti di ciascun alone di una popolazione di 8 aloni simulati, in funzione del redshift. La fase di accrescimento violento è ben visibile dai picchi delle curve, che rappresentano un'improvviso aumento della frazione di massa delle sottostrutture dovuta a merger con strutture massive. Mediante un approccio semianalitico Lapi e Cavaliere (2009) hanno ricostruito i tassi di crescita degli aloni. In Figura 4.11 riportiamo l'andamento temporale di tale massa per aloni di diversa massa attuale. L'approccio semianalitico utilizzato dagli autori non permette di apprezzare i singoli eventi di accrescimento, ma ci consente di avere una stima di quanto indicativamente aumenta in massa un alone. Ad esempio una struttura che oggi ha una massa di $10^{15} M_{\odot}$, a $z=1$ è un ordine di grandezza più piccola. Questo ci ha permesso di effettuare tagli in massa a diversi redshift nell'analisi del Capitolo ??.

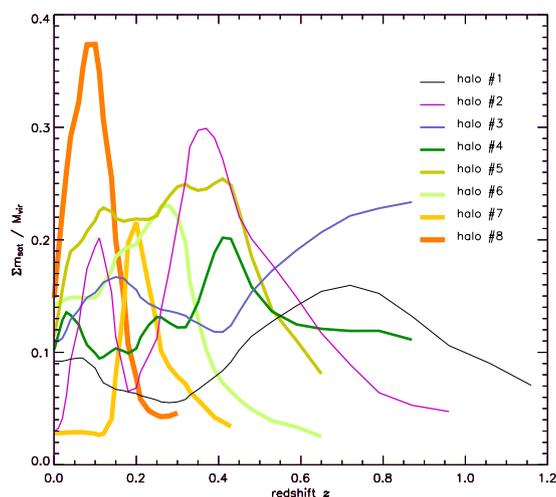


Figura 4.10: Massa componente le sottostrutture entro il raggio viriale, divisa per la massa viriale dell'alone in funzione del redshift. Sono mostrati i dati provenienti da 8 aloni diversi simulati. Da Gill et al. (2004)

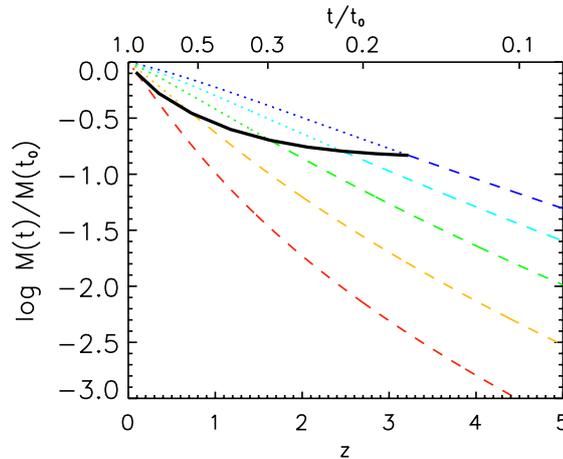


Figura 4.11: Evoluzione della massa di un alone in funzione del redshift. I diversi colori si riferiscono ad aloni di diversa massa attuale: blu $10^{11}M_{\odot}$, ciano $10^{12}M_{\odot}$, verde $10^{13}M_{\odot}$, arancione $10^{14}M_{\odot}$ e rosso $10^{15}M_{\odot}$. Le linee sono tratteggiate durante la fase di accrescimento violento e punteggiate nella successiva fase calma. La linea spessa collega le epoche di transizione dei diversi aloni. Da Lapi e Cavaliere (2009)

In Figura 4.6 possiamo notare che il numero di sottostrutture in caduta nell'alone è in continuo aumento. Questo riflette la ricchezza dell'ambiente circostante l'alone principale. Una struttura che cade in un alone può:

1. sopravvivere fino a $z=0$;
2. dissolversi a causa delle interazioni mareali e divenire parte dell'alone principale;
3. fare merging con un'altra sottostruttura e perdere quindi la propria identità. In realtà quest'ultima possibilità è stata osservata solo per una piccola percentuale delle sottostrutture accresciute;

come descritto in Gao et al. (2008). Le sottostrutture che sono state accresciute nelle prime fasi di formazione dell'ammasso risiedono nelle zone più centrali del cluster finale. Essendo state a lungo nelle zone centrali hanno subito per molto tempo l'azione della frizione dinamica e dello stripping mareale, pertanto le loro orbite saranno decadute di un fattore maggiore rispetto alle sottostrutture accresciute di recente. Questi effetti portano dunque ad una correlazione tra la posizione radiale di una sottostruttura ed il suo redshift di accrescimento. Nelle simulazioni descritte in Gao et al. (2008) si osserva in effetti che

le sottostrutture accresciute di recente tendono ad occupare le regioni esterne dell'alone principale, mentre quelle più vecchie risiedono nelle zone più interne. Quest'ultime hanno una minor frazione della massa che avevano prima della caduta nell'alone rispetto alle sottostrutture che risiedono nelle zone esterne, a causa dei fenomeni di stripping accennati sopra. Gli autori hanno inoltre osservato che la maggior parte delle sottostrutture presenti oggi sono state accresciute di recente. Solo circa il 10% di esse sono cadute nell'alone prima di $z=1$, mentre il 70% dopo $z=0.5$. Circa il 92% della massa totale delle strutture accresciute a $z=1$ è parte della materia diffusa dell'alone principale a $z=0$. Tale frazione sale al 98% per le sottostrutture accresciute a $z=2$. Tuttavia (Tormen, Moscardini e Yoshida (2004)) a causa della violenza del processo di merging non tutta la massa delle sottostrutture che cadono nell'alone rimane nella struttura principale. Circa un 20% della massa totale dei progenitori di un ammasso è sotto forma di "detriti" ad una distanza di circa 2 raggi viriali.

Se andiamo a considerare separatamente la componente di DM e di gas osserviamo dei comportamenti peculiari delle due specie. Consideriamo la frazione f di materia che effettivamente rimane nell'alone principale rispetto alla massa totale della sottostruttura. La frazione di DM rimane elevata per più tempo nelle sottostrutture piccole rispetto alla componente gassosa (Tormen, Moscardini e Yoshida (2004)). Ovvero gli oggetti di dimensioni galattiche mantengono una significativa frazione della loro massa iniziale per molto tempo, mentre il gas viene perso quasi subito a causa dello stripping dovuto al gas presente nell'ammasso. Andando a masse maggiori lo stripping mareale e la frizione dinamica diventano sempre più efficaci nel rimuovere la DM dalle sottostrutture. Nel contempo la buca di potenziale più profonda di queste strutture permette di trattenere una maggiore quantità di gas per più tempo. La separazione tra la componente di DM e di gas avviene molto presto per gli oggetti piccoli e sempre più tardi al crescere della massa. Non appena il gas si separa dalla dark matter, esso diventa slegato. Infatti prima della separazione la maggior parte del potenziale gravitazionale è dovuta alla DM, ed il gas è in equilibrio in tale buca di potenziale. Dopo la separazione, la buca di potenziale del gas è approssimativamente 9 volte meno profonda (pari al rapporto tra la massa totale di DM e gas). Tuttavia l'energia interna del gas rimane inalterata, ovvero circa nove volte maggiore del nuovo potenziale. Solo le sottostrutture molto grandi riescono a trattenere una considerevole quantità di gas per molto tempo.

4.3 | Distribuzione delle sottostrutture nell'ammasso

La Figura 4.12 mostra la funzione di massa cumulativa delle sottostrutture, normalizzata alla massa viriale dell'ammasso. Nel pannello in alto le linee rappresentano i dati provenienti da diversi cluster simulati (Dolag et al. (2009)). Le linee grigie sono relative a cluster di bassa massa mentre quelle nere sono per i cluster più massivi. L'andamento appare uniforme, ed è presente uno scatter solo ad alte masse, dovuto al minor numero di sottostrutture molto massive che rende meno accurata la statistica. La distribuzione segue una legge del tipo $N \sim m^{-1}$. Questo è confermato anche nelle precedenti analisi di Diemand, Moore e Stadel (2004) e Gao et al. (2008). Notiamo che l'andamento è uguale sia per le sottostrutture massive che per quelle più piccole, indicando quindi un andamento universale. L'andamento risulta essere indipendente anche dal redshift, in accordo con quanto trovato in Gao et al. (2008).

Il pannello in basso a sinistra di Figura 4.12 mostra la funzione di massa cumulativa delle sottostrutture per i run con idrodinamica non radiativa. Le diverse linee riguardano i risultati ottenuti con diversi trattamenti della viscosità artificiale. L'introduzione dell'idrodinamica non radiativa causa un calo della funzione di massa. Questo può essere spiegato dall'elevata efficienza con cui il gas viene rimosso durante la fase di infall delle sottostrutture nell'ammasso. Nel pannello in basso a destra è invece mostrata la medesima funzione di massa per i run idrodinamici radiativi. Le diverse linee rappresentano i valori ottenuti variando l'efficienza del feedback energetico o introducendo la conduzione termica. In questo caso il gas può raffreddarsi e formare stelle all'interno delle sottostrutture prima che queste entrino nelle zone ad alta pressione del cluster. Il raffreddamento ha l'effetto di concentrare il gas e quindi anche le stelle che da esso si formano. Questo aumenta la concentrazione della distribuzione in massa e protegge la materia barionica dallo stripping dovuto al gas dell'alone principale (*ram pressure stripping*). La funzione di massa dei subaloni è quindi più elevata rispetto al caso non radiativo, diventando più simile al run di sola DM. La maggior solidità delle sottostrutture con stelle è visibile in Figura 4.13. In questo grafico è plottata la frazione in massa di stelle in funzione del raggio, per diversi redshift. Possiamo notare come le zone interne abbiano una frazione maggiore che decresce all'allontanarsi dal centro. Infatti nelle zone centrali le sottostrutture subiscono forti interazioni mareali e vengono spogliate dell'alone di DM, mentre rimane la componente stellare. Que-

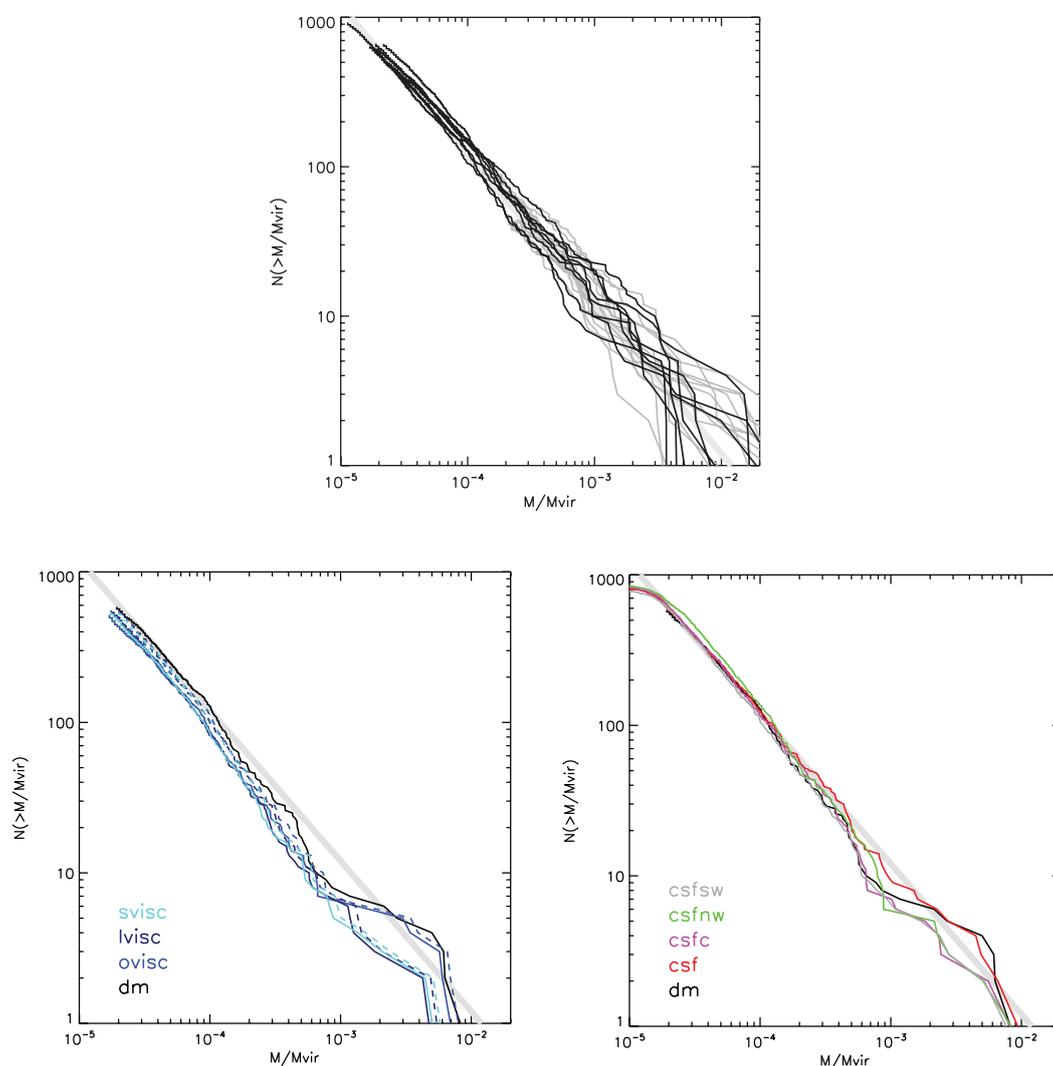


Figura 4.12: Funzione di massa cumulativa delle sottostrutture, normalizzata alla massa viriale dell'ammasso. *In alto:* run di sola DM. Le curve grigie riguardano aloni di bassa massa, mentre le curve nere sono per aloni massivi. *In basso a sinistra:* confronto tra il run di sola DM e i run con idrodinamica non radiativa. Le diverse linee riguardano i risultati ottenuti con diversi trattamenti della viscosità artificiale. *In basso a destra:* confronto tra il run di sola DM e i run con idrodinamica radiativa. Le diverse linee rappresentano i valori ottenuti variando l'efficienza del feedback energetico o introducendo la conduzione termica. In tutti e tre i pannelli la linea grigia spessa individua una legge di potenza del tipo m^{-1} . Da Dolag et al. (2009)

sto effetto diventa meno intenso allontanandoci dal centro, ed infatti la frazione stellare diminuisce.

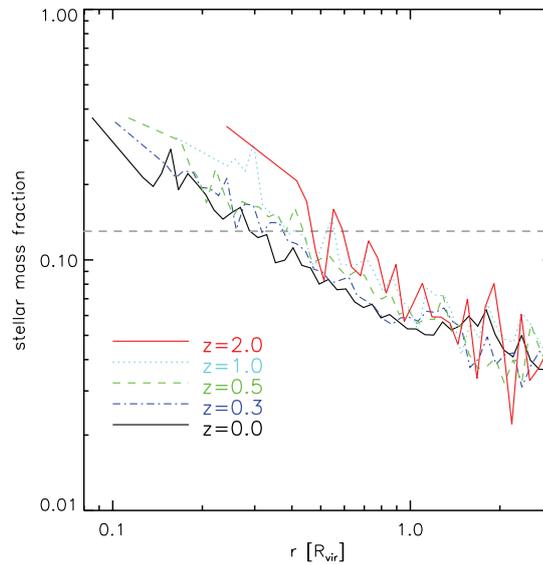


Figura 4.13: Frazione in massa di stelle in funzione del raggio, per diversi redshift. Ogni curva è ottenuta mediando i valori degli otto cluster simulati. La linea tratteggiata orizzontale individua il valore della frazione barionica cosmologica. Si noti che al crescere di z mediamente la frazione stellare aumenta. Infatti ad alti redshift il tempo di cooling, che va come ρ^{-1} , è più breve e quindi la formazione stellare più efficiente. Da Dolag et al. (2009)

4.4 | Rassegna dei fatti osservativi

Uno dei principali osservabili per lo studio degli ammassi di galassie è costituito dalle galassie. In questo paragrafo distingueremo le galassie in due classi, le *early-type* (ETG nel seguito) e le *late-type* (LTG) (Thomas e Katgert (2006)). Le prime sono galassie ellittiche con una popolazione di stelle mediamente vecchie. Osservativamente queste galassie non presentano forti righe di emissione nel loro spettro, e possono pertanto essere classificate come nELG (*non emission line galaxy*). Le LTG sono invece galassie a spirale blu, con una popolazione stellare più giovane. Il loro spettro è caratterizzato da linee di emissione e vengono pertanto denominate ELG (*emission line galaxy*) ed hanno formazione stellare attiva. La motivazione della presenza delle righe di emissione è da ricercarsi nel comportamento del gas presente in queste galassie. Essendo infatti ancora attiva la formazione stellare, è presente una notevole quantità di gas nonché numerose stelle grandi e calde (e quindi giovani), che scaldano tale gas producendo le righe di emissione osservate. Si osserva (Dressler (1980)) che le ETG sono presenti nelle zone del cluster a densità maggiore rispetto a dove sono osservate le LTG. Questa è la cosiddetta *morphology-density relation* o MDR. Poiché negli ammassi in equilibrio c'è, in buona approssimazione, una dipendenza monotona decrescente della densità dalla distanza dal centro, tale relazione viene spesso vista come una relazione *morfologia-raggio*.

Un altro aspetto importante che differenzia queste due classi di galassie è la cosiddetta *segregazione delle velocità*. Le LTG hanno una dispersione di velocità lungo la linea di vista (in seguito abbreviata in *los* ovvero *line of sight*) più elevata delle ETG (Biviano et al. (1992a), Diaferio et al. (2001)). Vedi ad esempio Figura 4.14. Le LTG sono entrate più tardi nell'ammasso (Diaferio et al. (2001)), ed infatti popolano prevalentemente le zone esterne ed hanno una notevole quantità di gas che non è stato ancora rimosso dal processo di *ram pressure stripping*. Per questo motivo hanno subito per meno tempo l'azione della frizione dinamica, anche nelle zone centrali dove è molto intensa. Allontanandosi dalle zone centrali dell'ammasso la densità diminuisce e quindi anche l'intensità della frizione dinamica. In queste zone infatti le dispersioni di velocità di entrambi i tipi di galassie sono simili.

Nei paragrafi seguenti discuteremo ulteriori differenze tra questi due tipi di galassie. I comportamenti osservati utilizzando questi oggetti come osservabili forniscono evidenze osservative dei fenomeni osservati nelle simulazioni.

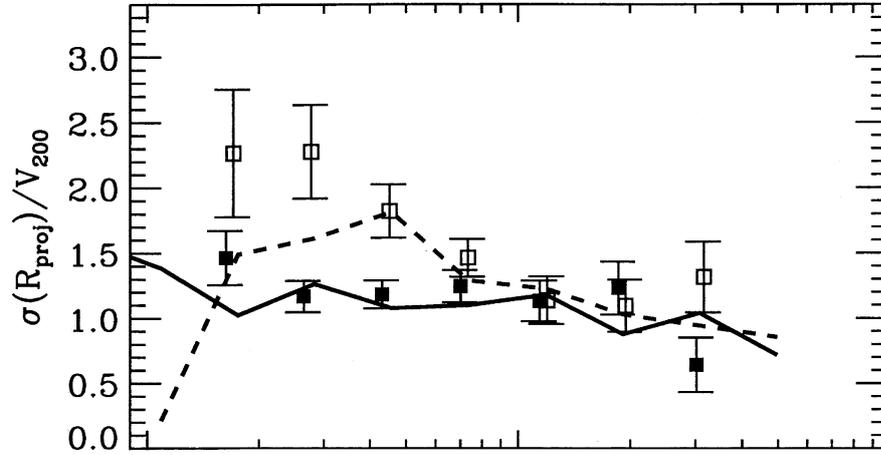


Figura 4.14: Profili differenziali di dispersione di velocità. I simboli chiari sono le galassie blu mentre quelli scuri sono relativi alle galassie rosse. Le linee rappresentano i profili ottenuti dalle simulazioni. Da Diaferio et al. (2001)

4.4.1 Il profilo di densità

Sebbene il profilo di NFW (equazione 4.2) sia stato ricavato dalle simulazioni per descrivere il profilo di densità della materia diffusa in alone, esso fornisce una buona descrizione (Biviano e Poggianti (2009)) ai profili di massa osservati degli ammassi di galassie sia a basso che a redshift intermedio. Tale profilo è stato utilizzato in Biviano e Poggianti (2009) per interpolare i dati del profilo di densità numerica delle galassie. Gli autori fanno notare che tale relazione non è da intendersi come descrizione del profilo di densità di tutta la materia. Infatti si evidenzia come il profilo di densità numerica e quello di massa non sono caratterizzati dalla medesima relazione NFW, ovvero non si lavora nell'ipotesi che la materia luminosa tracci il profilo di densità della materia totale. Nei casi in cui i profili si discostavano troppo da un andamento NFW, gli autori utilizzano un modello con *core*:

$$N \propto \left[1 + \left(\frac{r}{R_c} \right)^2 \right]^{-\alpha} \quad (4.3)$$

caratterizzato da due parametri, il raggio del *core* R_c e la pendenza α . In Diemand, Moore e Stadel (2004) un tale modello, con $\alpha = 1$, risulta essere una buona descrizione del profilo della densità numerica delle sottostrutture ricavato dalle simulazioni.

Nel pannello di sinistra di Figura 4.15 vediamo come il profilo NFW fornisca una buona descrizione della densità numerica proiettata $N(R_n)$ per le nELG, con concentrazione $c = 2.4$. D'altra parte il campione di ELG a basso redshift non è ben rappresentato da una relazione NFW, poichè tali galassie non sono presenti nella zona centrale dell'ammasso ed hanno una distribuzione più piatta. Utilizzando il modello di equazione (4.3) si trova un buon accordo con i dati osservativi per $R_c = 1.28$ e $\alpha = -3.2$. Dunque le galassie LTG non seguono un profilo NFW a basso redshift, a differenza delle ETG e delle LTG ad alto redshift.

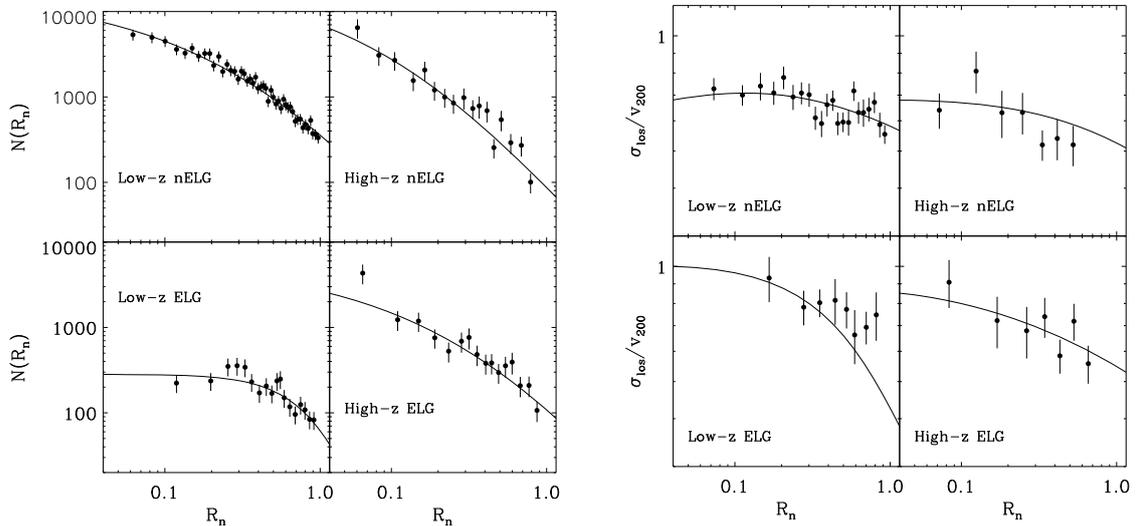


Figura 4.15: *A sinistra:* profili radiali di densità numerica. Le linee continue rappresentano i modelli che meglio riproducono la distribuzione dei dati (vedi il testo per maggiori informazioni sui modelli): *core-model* per le ELG a basso redshift e NFW per gli altri grafici. *A destra:* profili radiali di dispersione di velocità normalizzati rispetto v_{200} . Le linee continue rappresentano i modelli che meglio riproducono la distribuzione dei dati (vedi il testo per maggiori informazioni sui modelli). Da Biviano e Poggianti (2009)

Ulteriori evidenze riguardanti la distribuzione radiale della densità vengono da un confronto tra la densità in massa e quella numerica. In Figura 4.16 è rappresentato il profilo radiale del rapporto tra la densità in massa e la luminosità per un campione di 3056 galassie in 59 ammassi a basso redshift osservati nell'ESO Nearby Abell Cluster Survey (Katgert,

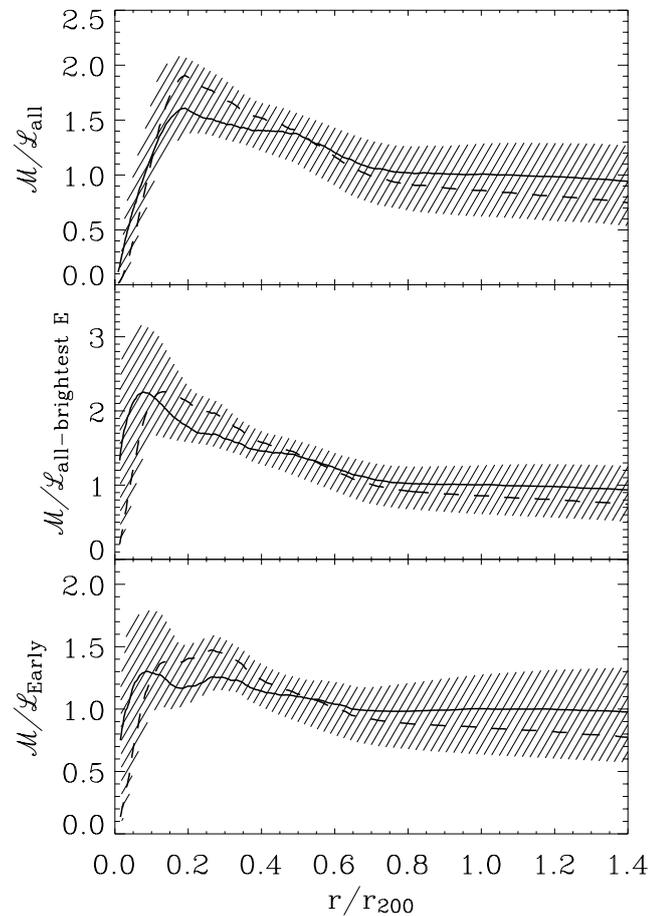


Figura 4.16: Profilo radiale del rapporto tra la densità in massa e la luminosità. *In alto:* tutte le galassie sono state considerate. *Al centro:* dal campione è stata tolta la BCG. *In basso:* sono stati utilizzati solo i dati relativi alle ETG. In tutti i pannelli la regione ombreggiata rappresenta la regione ad 1σ . Le linee continue sono per il fit con la NFW, mentre quelle tratteggiate sono per il fit con la relazione di Burkert $\rho \propto (1 + r/r_0)[1 + (r/r_0)^2]$. Da Katgert, Biviano e Mazure (2004)

Biviano e Mazure (2004)). Nel pannello in alto vediamo la curva ottenuta con tutti i dati. Nelle zone più interne possiamo notare una salita, dovuta alla presenza della galassia più luminosa dell'ammasso (BCG - *brightest cluster galaxy*). Se tracciamo il medesimo profilo senza contare il contributo della BCG otteniamo la curva del pannello centrale, dove infatti non è più presente la salita (entro le barre d'errore). Nell'ultimo pannello infine il profilo è stato fatto utilizzando solo le ETG. La curva risulta più piatta rispetto al caso del pannello centrale. Essendo galassie dello stesso tipo possiamo ipotizzare una proporzionalità tra

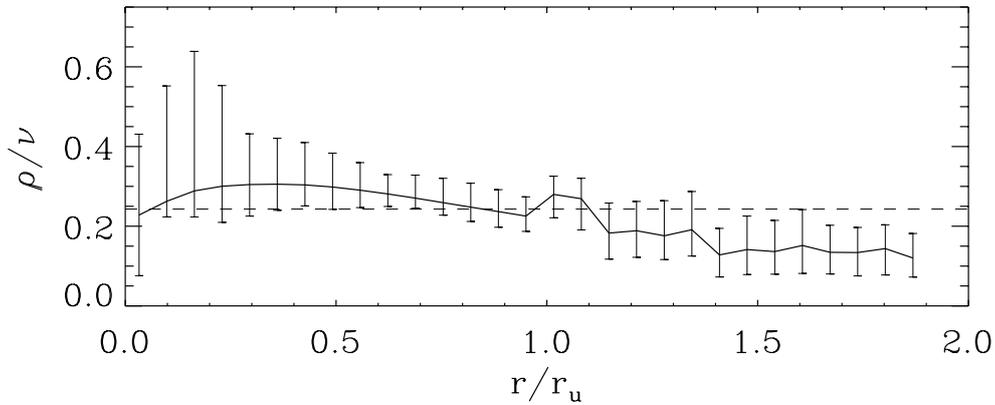


Figura 4.17: Profilo radiale del rapporto tra la densità in massa e la densità numerica per un campione di ETG. Da Biviano e Girardi (2003)

la luminosità ed il numero di galassie. Possiamo quindi comparare l'andamento visto in quest'ultimo caso e quello del profilo ρ/v in Figura 4.17 ottenuto per un campione di ETG (Biviano e Girardi (2003)). L'andamento risulta molto simile, e risulta quindi plausibile ipotizzare che le ETG siano ben descritte da un profilo di questo tipo. Questo è importante in quanto l'andamento piatto del profilo di ρ/v indica che il profilo in massa e quello numerico seguono la medesima legge. Poichè il profilo di densità di massa sembra essere ben descritto da una relazione NFW (vedi considerazioni nel seguito), anche il profilo di densità numerica delle galassie ETG è ben descritto dalla relazione NFW, in accordo con quanto trovato in Biviano e Poggianti (2009).

Un'ulteriore prova del rapporto tra la distribuzione in massa ed in numero di galassie è portata in van der Marel et al. (2000), dove si è studiato un campione di 16 ammassi con redshift compreso tra 0.17 e 0.55, proveniente dal CNOC1 cluster survey. Le relazioni di proiezione della dispersione di velocità (Binney e Tremaine (1987)) consentono di ricavare la dispersione lungo la linea di vista conoscendo la dispersione radiale ed il parametro di anisotropia. Viceversa, si possono lasciare queste due quantità come parametri da ricavare interpolando i dati osservati. Ottenuta la dispersione radiale in questo modo, la densità di massa può essere ricavata dall'equazione di Jeans. È così possibile tracciare il profilo radiale del rapporto ρ/v come mostrato in Figura 4.18 per diversi valori di β . In questo grafico la linea più spessa indica il profilo per una distribuzione isotropa delle velocità. Sebbene non presenti un profilo leggermente calante come in Figura 4.16 e 4.17, anche

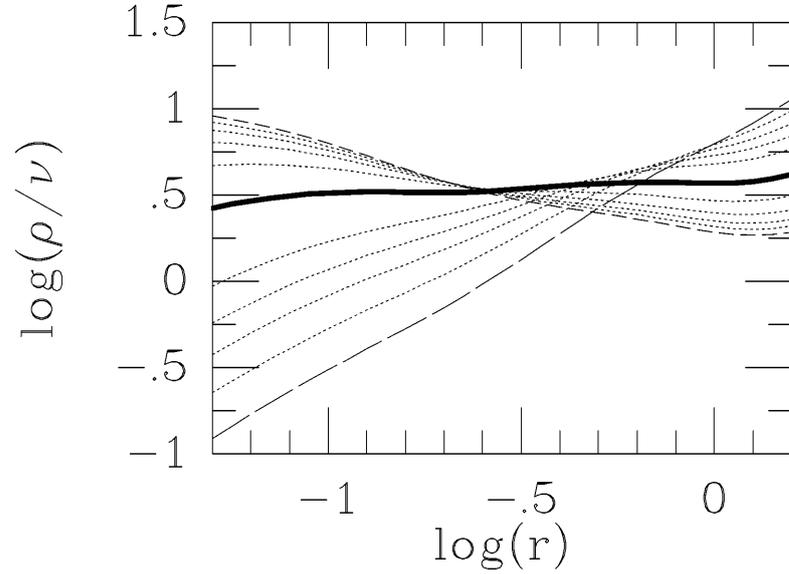


Figura 4.18: Profilo radiale del rapporto ρ/ν per diversi valori di β . La linea più spessa indica il profilo per una distribuzione isotropa delle velocità. La linea col trattineglio corto è per $\sigma_r/\sigma_t = 1/3$, mentre quella col trattineglio lungo è per $\sigma_r/\sigma_t = 3$. Le altre linee sono per valori intermedi tra $1/3$ e 3 , logaritmicamente equispaziati. Da van der Marel et al. (2000)

questo profilo indica che la densità in massa e quella numerica hanno distribuzioni radiali simili. Il motivo per cui gli autori hanno evidenziato l'andamento corrispondente ad una distribuzione isotropa è che essi hanno costruito una funzione di distribuzione per riprodurre la distribuzione spaziale e delle velocità osservate. Il modello ottenuto riproduceva al meglio i dati osservati per un parametro di anisotropia prossimo a 0.

4.4.2 La dispersione di velocità

Per quanto riguarda il parametro di anisotropia β , un problema deriva dal fatto che non è noto se esista una relazione universale quale la NFW per il profilo di densità di massa. Due modelli usati sono il Mamon-Lokas (abbreviato in ML) e l'Osipkov-Merrit (abbreviato in OM) come descritto in Biviano e Poggianti (2009). Tali modelli hanno la seguente forma:

$$\beta = 0.5 \frac{r}{r+a} \quad \text{ML} \quad (4.4a)$$

$$\beta = \frac{r^2}{r^2+a^2} \quad \text{OM} \quad (4.4b)$$

I profili di dispersione di velocità lungo la linea di vista σ_{los} sono mostrati nel pannello di destra di Figura 4.15. Utilizzando le relazioni ML e OM per esprimere il parametro di anisotropia, e la relazione NFW per la densità numerica ricavata nel paragrafo precedente, possiamo trovare il profilo analitico di σ_{los} utilizzando una relazione NFW per il profilo di massa. Ricavati i parametri che meglio riproducono i dati osservativi, possiamo osservare l'andamento del parametro di anisotropia. In Figura 4.19 mostriamo il profilo di $\sigma_r/\sigma_t = (1 - \beta)^{-1/2}$.

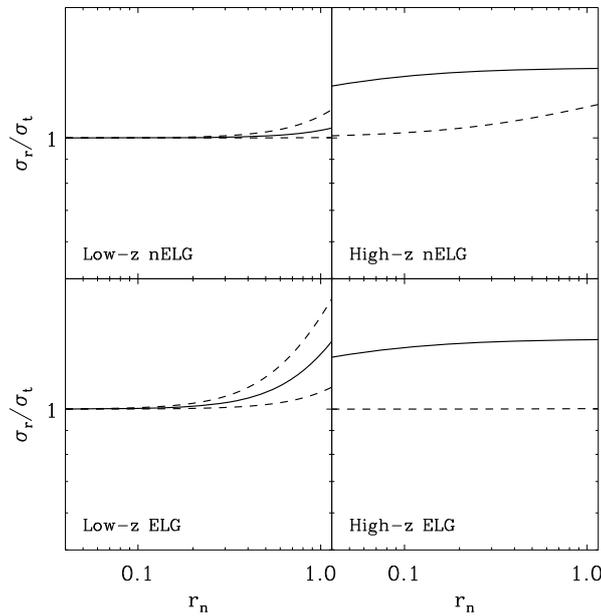


Figura 4.19: Profilo di anisotropia ricavato dal fit con i dati osservati. Il fit migliore si ottiene con un modello OM per il campione a basso z , e con un modello ML per il campione ad alto z . Le linee tratteggiate rappresentano la zona al 90% dell'intervallo di confidenza. Da Biviano e Poggianti (2009)

Ammassi a basso redshift: il campione utilizzato in Biviano e Poggianti (2009) è costituito da 59 ammassi con un redshift medio $\langle z \rangle = 0.07$. Il pannello in alto a sinistra di Figura 4.19 suggerisce un'isotropia delle orbite per le nELG entro la regione virializzata. Il pannello sottostante indica invece come le orbite delle ELG siano isotrope solo fino a circa metà della zona viriale, per poi divenire progressivamente sempre più radiali, comportamento confermato anche in Biviano e Katgert (2004).

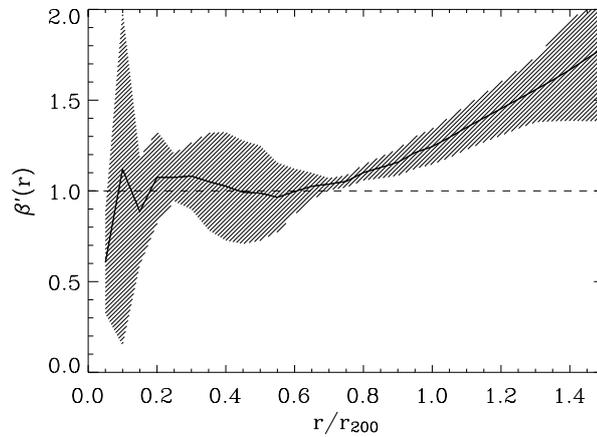


Figura 4.20: Profilo del parametro di anisotropia. L'area ombreggiata è la regione ad 1σ . Da Biviano e Katgert (2004)

Ammassi ad alto redshift: il campione utilizzato in Biviano e Poggianti (2009) è costituito da 19 ammassi con un redshift medio $\langle z \rangle = 0.56$. Nei pannelli a destra della Figura 4.19 osserviamo il comportamento simile delle ELG e nELG. Entrambe sembrano mostrare anisotropia, con orbite preferenzialmente radiali.

Tale analisi sembra dunque suggerire un'evoluzione temporale delle orbite, preferenzialmente radiali ad alti redshift e maggiormente isotrope a bassi z . Gli autori propongono che il meccanismo in grado di isotropizzare le orbite sia la crescita in massa del cluster per accrescimento gerarchico, come proposto da Gill et al. (2004) e descritto nel paragrafo 4.1 di questo lavoro di tesi. Infatti nella fase di accrescimento veloce gli ammassi sono sottoposti a violenti cambiamenti del potenziale dovuti ai *major-mergers*. L'energia ed il momento angolare vengono distribuiti nell'ammasso causando l'isotropizzazione delle orbite. Gli ammassi utilizzati per questa analisi ad alto redshift hanno una massa media di $4.4 \cdot 10^{14} M_{\odot}$. Dalla Figura 4.11 vediamo che ammassi di questa massa passano dalla fase di accrescimento violento a quella calma a $z \sim 0.4$. Il campione qui analizzato ha $\langle z \rangle = 0.56$ e risulta quindi essere ancora in fase di accrescimento violento. Le orbite delle galassie di questo campione è dunque probabile che continuino ad evolvere. A redshift inferiore abbiamo infatti visto che le nELG hanno orbite isotrope. Le ELG devono invece essere cadute nell'ammasso più tardi, in quanto nelle zone esterne hanno orbite prevalentemente radiali, come abbiamo visto. nella zona esterna la loro velocità abbiamo visto essere ancora

preferenzialmente radiale. Cioè mantengono ancora memoria del processo di infall. Inoltre il fatto che in queste galassie la formazione stellare sia ancora attiva e siano presenti righe di emissione implica che esse siano ricche di gas che non è stato ancora rimosso dalla ram pressure dovuta al gas dell'alone principale.

4.4.3 Evidenze di equilibrio dinamico negli ammassi

Gli studi osservativi presentati fin'ora assumevano l'equilibrio delle strutture osservate, al fine di utilizzare l'equazione di Jeans. Per poter esser sicuri che effettivamente gli ammassi siano strutture virializzate è necessario utilizzare anche altri metodi. Se ad esempio il profilo di massa ottenuto con differenti approcci risulta avere lo stesso comportamento di quello visto negli studi illustrati fin'ora, è plausibile considerare gli ammassi come strutture virializzate. Oltre agli studi basati sulle osservazioni in banda ottica della dinamica tracciata dalle galassie è possibile studiare la dinamica interna degli ammassi tracciata dal gas diffuso intra-ammasso (Intra-Cluster Medium; ICM) tramite osservazioni in banda X. Infatti tale gas si trova ad alte temperature, $10^7 - 10^8 K$, ed in quanto tale risulta essere completamente ionizzato così da emettere in banda X per radiazione di frenamento associata allo scattering degli elettroni liberi sugli ioni (Sarazin (1986)). Se supponiamo che il gas dell'ammasso sia in equilibrio, dall'equazione dell'equilibrio idrostatico e dall'equazione di stato del gas otteniamo l'equivalente dell'equazione di Jeans per un gas, dove il termine cinetico non è più dato da σ_r^2 ma dalla temperatura. La luminosità X è legata alla temperatura e alla densità ($L_X \sim \rho^2 T^{-1/2}$), per cui utilizzando un profilo di tipo β -model isoterma (Cavaliere e Fusco-Fermiano (1976)) è possibile ricavare la temperatura ed infine il profilo di massa. La luminosità superficiale del β -model isoterma ha la seguente forma:

$$S(R) = S_0 \left(1 + \left(\frac{R}{r_c} \right)^2 \right)^{-3\beta+1/2} \quad (4.5)$$

dove R è il raggio proiettato, r_c è il raggio del core e $\beta = \mu m_p \sigma^2 / kT$, dove μ è il peso molecolare medio, m_p la massa del protone, σ la dispersione di velocità e T la temperatura del gas. In Figura 4.21 vediamo un confronto tra le stime di massa ricavate da osservazioni nell'ottico e nel X di uno stesso campione (vedi Girardi et al. (1998) per i dettagli del campione utilizzato). Nonostante una certa dispersione possiamo notare una corrispondenza tra le masse trovate con i due diversi metodi.

In Figura 4.22 riportiamo un confronto tra diverse tecniche per stimare il profilo di massa di tre ammassi (Diaferio, Geller e Rines (2005)). In un grafico della dispersione di

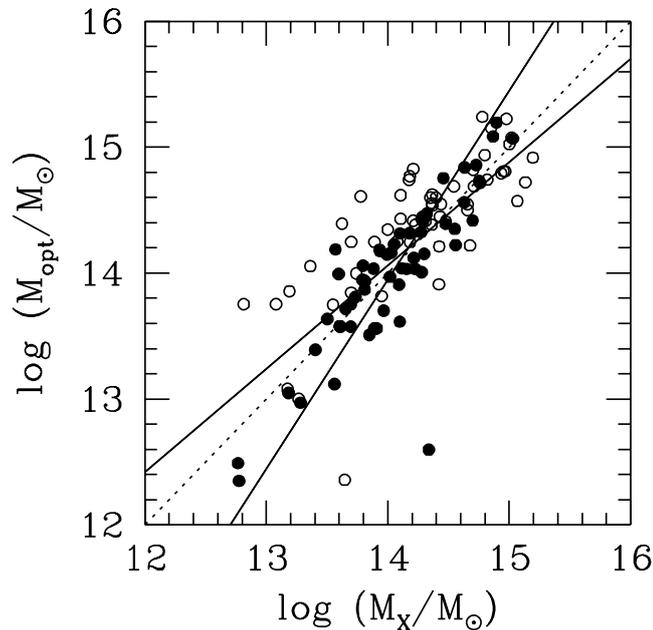


Figura 4.21: Confronto tra le stime ricavate da osservazioni nell'ottico e nel X. Le linee sono i fit lineari (x vs y e y vs x). I diversi colori dei punti indicano due diversi campioni utilizzati. Da Girardi et al. (1998)

velocità lungo la linea di vista in funzione della distanza proiettata le galassie si distribuiscono formando una particolare figura *a tromba*, visibile nel pannello in alto della figura. I bordi della distribuzione sono chiamati *caustiche*. Si può dimostrare (rimandiamo all'articolo e alle referenze ivi riportate per maggiori dettagli sul metodo) che è possibile legare l'ampiezza in velocità ad una certa distanza con la velocità di fuga dal potenziale gravitazionale del cluster. E di conseguenza avere una stima della massa a quella distanza. Nel pannello centrale sono riportati i valori così ricavati per tre ammassi, mentre nel pannello inferiore ci sono le stime ottenute utilizzando l'effetto di lente gravitazionale dovuto al potenziale dell'ammasso, sia in regime debole (simboli chiari) che in regime forte (simboli scuri). Le linee continue sono i profili NFW ottenuti con un best-fit dei dati estrapolati col metodo delle caustiche, la linea punteggiata è un fit del profilo NFW per i dati ottenuti con misure nell'X mentre la linea tratteggiata è il best-fit di un modello isoterma (A2390 e MS 1358) o NFW (Cl 0024) dai dati ottenuti con il *lensing*.

Il metodo delle caustiche e quello del *lensing* non assumono l'equilibrio della struttura.

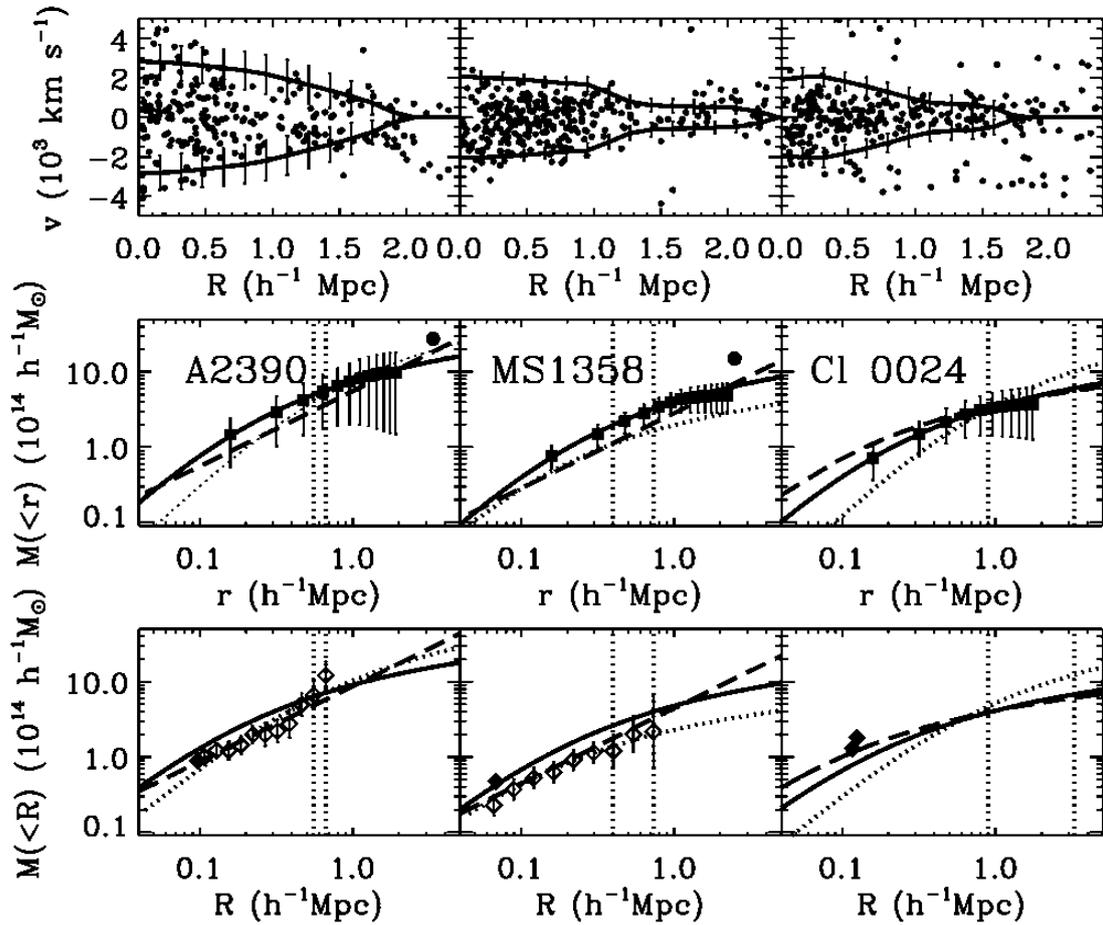


Figura 4.22: . *In alto:* diagramma dei redshift delle galassie (punti) e posizione delle caustiche (linee continue). Le velocità sono da intendersi rispetto al sistema di riferimento dell'ammasso. *Al centro:* profilo di massa misurato con la tecnica delle caustiche e confronto con le curve ottenute fittando dati ottenuti con diverse tecniche (vedi il testo per maggiori dettagli). *In basso:* profilo di massa misurato con il lensing debole (simboli chiari) e forte (simboli scuri). Per il pannello centrale e quello inferiore le barre di errore sono a 1σ . Da Diaferio, Geller e Rines (2005)

I risultati sono in accordo tra di loro e con le stime nell' X , a parte per il cluster Cl 0024 per il quale però gli autori ipotizzano una struttura non in equilibrio che rende inutilizzabili i dati ottenuti nell' X .

Possiamo concludere che i diversi metodi, ottenuti con tecniche indipendenti, sono in buon accordo. Tuttavia metodi basati sull'assunzione dell'equilibrio della struttura possono

dare informazioni non attendibili qualora l'assunzione di equilibrio fosse errata. Se invece essa è valida, le osservazioni suggeriscono una distribuzione in massa così come in numero delle galassie che segue una relazione NFW, e confermano i processi dinamici osservati nelle simulazioni.

Dinamica delle sottostrutture in simulazioni realizzate con GADGET2

In questo capitolo vedremo un'analisi effettuata su simulazioni basate sul codice di simulazione cosmologica GADGET2 (vedi paragrafo 2.3). Analizzeremo in particolare le orbite delle sottostrutture per valutare gli effetti di fenomeni dinamici quali frizione dinamica e distruzione mareale e processi di infall previsti dallo scenario di accrescimento gerarchico. I risultati, sebbene autoconsistenti, mostrano delle discrepanze con quanto trovato da altri autori, i cui risultati sono stati illustrati nel Capitolo 4.

5.1 | Le simulazioni utilizzate

Il set di simulazioni usate in questo lavoro di tesi è costituito da 29 risimulazioni di altrettante zone lagrangiane di una simulazione a bassa risoluzione dove erano stati localizzati degli ammassi (vedi paragrafo 2.5). La box cosmologica ha un lato comovente di $1h^{-1}Gpc$. Il modello cosmologico è un Λ CDM piatto con $\Omega_m = 0.24$ per il contributo della materia, $\Omega_{baryon} = 0.04$ per la sola materia barionica, $\Omega_\Lambda = 0.76$ per il contributo della costante cosmologica ed un valore odierno del parametro di Hubble pari a $H_0 = 72 km s^{-1} Mpc^{-1}$. Di queste 29 simulazioni, 24 sono centrate su ammassi con massa viriale $M_{vir} \gtrsim 10^{15} h^{-1} M_\odot$. Le rimanenti 5 sono centrate su ammassi con massa viriale $M_{vir} \gtrsim (1 - 7) \cdot 10^{14} h^{-1} M_\odot$. Le particelle di DM hanno massa $m_{DM} = 8.47 \cdot 10^8 h^{-1} M_\odot$. Nelle simulazioni con gas (denominate *ovisc*) le particelle di gas hanno massa $m_{gas} = 1.53 \cdot 10^8 h^{-1} M_\odot$. In questo tipo

di simulazioni è stata implementata la viscosità artificiale, ma non sono presenti fenomeni radiativi nè feedback.

5.2 | Processo di stacking

Pensiamo di voler analizzare una simulazione, ed in particolare studiare le proprietà dinamiche delle sottostrutture negli ammassi più grandi di $10^{14} M_{\odot}$. Per concretezza utilizziamo una delle simulazioni con aloni massicci, e vediamo dalla Tabella 5.1 che abbiamo a disposizione solo due aloni che soddisfano alle condizioni richieste, per un totale di 850 sottostrutture. Considerando un solo alone e dividendolo in 20 bin radiali possiamo notare come entro ogni bin abbiamo indicativamente una ventina di sottostrutture. In realtà le sottostrutture non sono distribuite uniformemente all'interno del cluster, per cui in alcuni bin avremo qualche sottostruttura, e potrebbe capitare di non averne nemmeno una. Ci accorgiamo dunque che la statistica con cui abbiamo a che fare è molto bassa. Inoltre se lavorassimo in questa maniera saremmo soggetti alla peculiarità dell'alone studiato. Ovvero, l'alone che stiamo considerando potrebbe avere avuto una storia particolare, ad esempio potrebbe aver avuto delle forti interazioni mareali, che gli hanno fatto assumere una conformazione particolare. I fenomeni che osserveremmo non riprodurrebbero dunque comportamenti universali delle sottostrutture, in quanto risulterebbero affetti dalle peculiarità del sistema in esame. Per ovviare a questi problemi si ricorre al processo di *stacking*. Si tratta di mediare le quantità relative ad ogni ammasso tra tutti gli ammassi di tutte le simulazioni. Tuttavia abbiamo a che fare con strutture di diverse dimensioni, ed una media delle quantità all'interno di un bin radiale porterebbe a mescolare parti virializzate con parti non virializzate di diversi aloni. Per ovviare a questo problema tutte le quantità utilizzate devono essere normalizzate per le rispettive quantità scala tipiche di ogni alone.

Vediamo più in dettaglio i vari passaggi di questo metodo.

1. Poiché vogliamo studiare la dinamica entro $2 \cdot r_{200}$, creiamo un vettore con valori equispaziati da 0 a 2. Questo sarà il vettore della distanza dal centro in unità normalizzate. Utilizziamo 8 intervalli per lo studio delle sottostrutture e 24 per lo studio delle particelle, siano esse di DM o gas.
2. Consideriamo una simulazione e cerchiamo i gruppi FoF che non abbiano contaminanti, ovvero particelle a bassa risoluzione che sono quelle utilizzate durante la

$M_{halo} \in [0, \infty)$		
	Aloni	sub
Stack	4459	52296
g0016649	74	1240

$M_{halo} \in [10^{14}, \infty)$		
	Aloni	sub
Stack	64	27510
g0016649	2	850

Tabella 5.1: Comparazione tra la statistica di una singola simulazione e la statistica dopo il processo di stacking.

risimulazione per i contributi mareali, ma che non costituiscono strutture utilizzabili per l'analisi scientifica.

3. Per ogni gruppo FoF leggiamo i valori di m_{200} e r_{200} restituiti da subfind, da cui ricaviamo la velocità circolare $v_{200} = (G \cdot m_{200}/r_{200})^{1/2}$.
4. Utilizziamo le tre quantità scala del punto precedente per normalizzare le masse, le distanze, le velocità e le densità.
5. Entro ogni bin cerchiamo le quantità a cui siamo interessati, come dispersione di velocità totale, radiale e tangenziale, densità in massa ed in numero. I valori trovati vengono salvati in un vettore che alla fine del ciclo conterrà tutte le quantità di tutte le sottostrutture di tutti gli aloni di tutte le simulazioni.
6. Cicliamo le operazioni sopra descritte su tutti i FoF e su tutte le simulazioni.
7. Rimane ora da mediare su tutti i valori trovati di una certa quantità per ogni bin. Per fare questo abbiamo utilizzato due metodi, la media pesata e la media biweight (vedi Appendice B). La media pesata è molto veloce ed utilizza come peso il numero di particelle (o di sottostrutture) con cui abbiamo calcolato la quantità di interesse in un dato bin per una data sottostruttura. Il problema di questo stimatore risiede nel fatto che esso fornisce buone stime se siamo in presenza di distribuzioni prossime alla

gaussianità e soprattutto senza dati che si discostino tanto dalla zona centrale della distribuzione. In Figura 5.1 vediamo un esempio di un bin con una distribuzione per la quale la media pesata restituirebbe un valore poco attendibile ed affetto da errori consistenti. Abbiamo preferito quindi utilizzare la media biweight come stimatore della media, in quanto rigetta i valori troppo lontani dalla zona centrale della distribuzione (nel caso riportato in figura i valori prossimi a 35 e 85) ed assegna pesi diversi in base alla lontananza dalla zona centrale della distribuzione valutata per mezzo della mediana (vedi Appendice B per maggiori dettagli). I valori molto lontani dalla zona centrale della distribuzione possono infatti essere poco significativi. Nel caso riportato in figura si analizza l'anisotropia delle orbite. Le due strutture con valori di σ_r/σ_t così elevati probabilmente hanno avuto una storia particolare, come un incontro con altre sottostrutture che ha perturbato le orbite. Ma questi comportamenti peculiari non ci danno informazioni sui comportamenti universali che vogliamo studiare, e per quanto interessanti individualmente, è opportuno che non pesino eccessivamente nell'analisi statistica dell'insieme. Ovviamente questo discorso è valido purchè i valori lontani siano pochi. L'analisi degli istogrammi ci ha permesso di verificare che effettivamente i valori molto lontani erano sempre pochi.

5.3 | Le orbite delle sottostrutture

In tutte le analisi che seguiranno è stato usato il processo di stacking per ottenere i valori delle diverse quantità in esame. Si sono studiati i comportamenti a tre differenti redshift: $z=0$, 0.5 e 1. Abbiamo inoltre fatto una selezione degli aloni principali nella procedura di stacking. Infatti certi fenomeni sono legati a quantità fisiche assolute, rendendo cluster di diversa massa non omologhi. Fenomeni quali frizione dinamica o stripping mareale sono molto importanti nelle zone centrali di un ammasso, ma dipendono dalla dimensione del cluster: il primo fenomeno dipende dalla densità, più elevata nelle zone centrali, mentre il secondo dai gradienti del potenziale, meno elevati nelle parti esterne. In un ammasso piccolo questi fenomeni saranno meno efficienti rispetto a quelli che agiscono in un ammasso di grande massa. Pertanto l'analisi della dinamica delle sottostrutture in base alla distanza normalizzata avrebbe come risultato il mescolamento di sistemi con fenomeni poco importanti ed altri dove tali processi sono fondamentali. Sarebbe dunque impossibile valutare l'effetto di fenomeni di questo tipo. Per le simulazioni a $z=0$ e 0.5 abbiamo analizzato gli aloni con massa $M > 10^{14}M_{\odot}$, dove la massa è quella restituita da Subfind ed è la somma

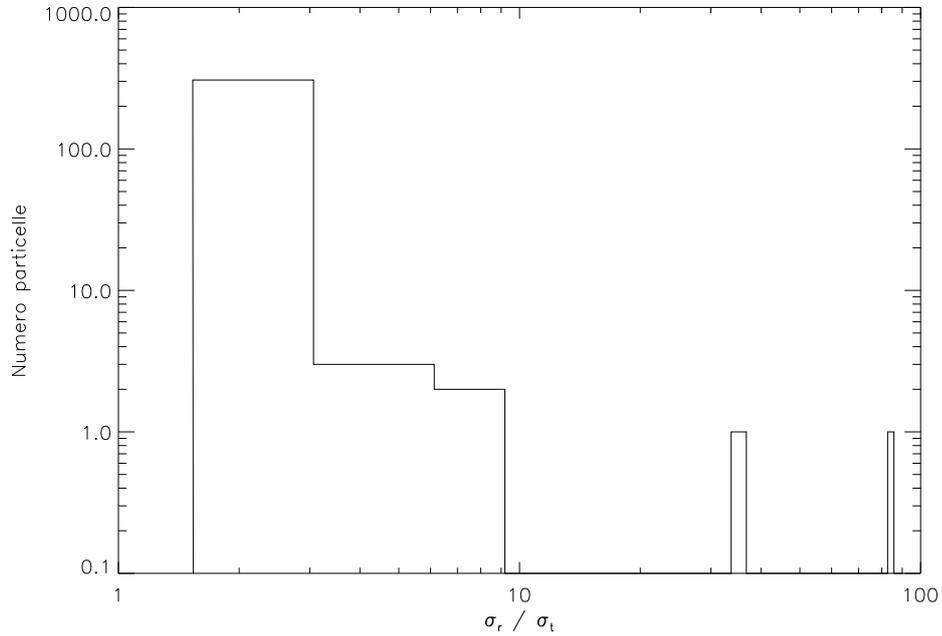


Figura 5.1: Istogramma della distribuzione di σ_r/σ_t per un bin affetto da marcata non gaussianità.

delle masse di tutte le particelle che costituiscono la struttura, ovvero tutte quelle legate gravitazionalmente. Per le simulazioni a $z=1$ abbiamo utilizzato gli aloni con $M > 10^{13} M_\odot$. La scelta di selezionare strutture a partire da un ordine di grandezza inferiore rispetto ai redshift superiori è stata fatta in base alle considerazioni sull'evoluzione in massa per accrescimento gerarchico in Lapi e Cavaliere (2009). Se osserviamo la Figura 4.11 di questo lavoro di tesi, tratta dal lavoro appena citato, notiamo che strutture che oggi hanno massa di $10^{15} M_\odot$ a $z=1$ hanno una massa di un ordine di grandezza inferiore. Se guardiamo sistemi con massa attuale $(1 - 10) \cdot 10^{14} M_\odot$ abbiamo $M(z=1)/M(z=0) \simeq 0.1 - 0.2$.

Facendo dunque questo taglio in massa in prima approssimazione possiamo pensare che a $z=1$ stiamo osservando strutture che faranno parte di strutture più massicce a $z=0$. In realtà non siamo sicuri di osservare a $z=1$ esattamente le strutture che dopo merging formano le strutture visibili a $z=0$. Tuttavia l'identificazione delle stesse strutture a diversi redshift richiede algoritmi computazionali sofisticati che appesantiscono le simulazioni. Per i fini di analisi statistica di questa tesi, abbiamo ritenuto di seguire l'approccio descritto, più semplice ma indubbiamente più efficace dal punto di vista computazionale.

5.3.1 *Profilo di anisotropia*

In Figura 5.5 e 5.6 mostriamo i profili di anisotropia, ovvero di σ_r/σ_t , rispettivamente per le particelle e per le sottostrutture. In entrambe le figure la colonna di sinistra è relativa alle simulazioni di sola DM, mentre per la colonna di destra si sono utilizzate le simulazioni di DM con gas. La riga in alto mostra i risultati a $z=1$, quella centrale a $z=0.5$ mentre quella inferiore è per $z=0$.

Particelle: gli andamenti sembrano suggerire isotropia e nessun trend radiale per entrambi i tipi di simulazioni a $z=1$ e 0.5 . Una leggera anisotropia è invece presente a $z=0$. Per quanto riguarda $z=0$ i punti hanno valori sempre maggiori di 1 indicando una dispersione radiale leggermente superiore a quella tangenziale. L'andamento rimane però piatto. Nelle simulazioni con gas i valori dei punti sono quasi sempre maggiori di 1 e si può notare anche una debole crescita radiale del profilo.

Sottostrutture: i punti risultano più dispersi rispetto alle particelle, fatto da imputarsi al minor numero di oggetti su cui effettuare l'analisi statistica. A conferma di ciò vediamo le barre d'errore nettamente più grandi. Anche in questo caso non si nota alcuna dipendenza radiale e le sottostrutture sono sempre molto vicine all'isotropia.

Gli ammassi si formano per accrescimento soprattutto lungo i filamenti. È quindi lecito aspettarsi che ad alti redshift vi sia una prevalenza di moto radiale. Tale moto di infall è presente a tutte le distanze dal centro, in quanto le sottostrutture hanno bisogno di tempo affinché le loro orbite vengano circolarizzate per effetto della frizione dinamica o della crescita in massa della struttura. I subaloni caduti per primi sono stati distrutti dallo stripping mareale e pertanto non ci aspettiamo di vedere strutture con orbite già circolarizzate nelle zone centrali. Le figure sembrano invece mostrare un andamento isotropo già a $z=1$. La frizione dinamica potrebbe esser stata molto efficace ed aver isotropizzato le orbite già a $z=1$. Rimane ancora da chiarire il motivo per cui le particelle mostrano isotropia a redshift così alto, non essendo soggette a frizione dinamica. Inoltre il sistema non ha finito la fase di accrescimento per cui sembra improbabile che si sia rilassato già a $z=1$, come infatti risulta dall'analisi riportata nel paragrafo 5.4. Le orbite isotrope potrebbero risultare da processi di rilassamento violento Lynden-Bell (1967) che operano su tempi scala dinamici relativamente brevi, capaci di condurre il sistema a rimescolamenti delle orbite ancora prima che raggiunga l'effettiva stabilità dinamica. In Figura 5.2 vediamo la distribuzione in

massa delle sottostrutture per gli aloni più massivi. Notiamo il progressivo aumento di sottostrutture al diminuire del redshift, indice di un processo di accrescimento.

La distruzione mareale è visibile dalla distribuzione radiale della densità numerica di sottostrutture (normalizzata al numero totale di sottostrutture) di Figura 5.3. La frazione di sottostrutture nelle zone più centrali assume il valore massimo per $z=1$. A $z=0.5$ ho un valore intermedio mentre il valore più basso è per $z=0$. All'aumentare della distanza dal centro otteniamo risultati opposti. Questa inversione ci fa supporre che vi sia stata un'intensa azione di distruzione mareale maggiormente efficace nelle zone interne.

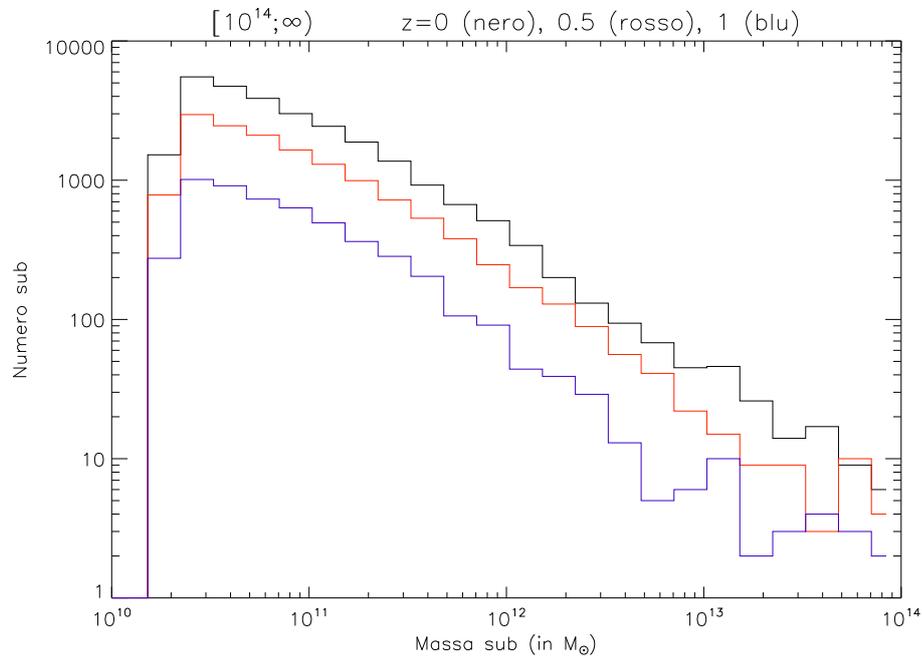


Figura 5.2: Distribuzione in massa delle sottostrutture per aloni massivi. I diversi colori indicano le distribuzioni a diversi redshift come indicato sul grafico stesso.

Per verificare che non vi fossero effetti di risoluzione che rendessero le simulazioni a bassa risoluzione insufficienti a descrivere la dinamica, abbiamo fatto un'analisi con i run

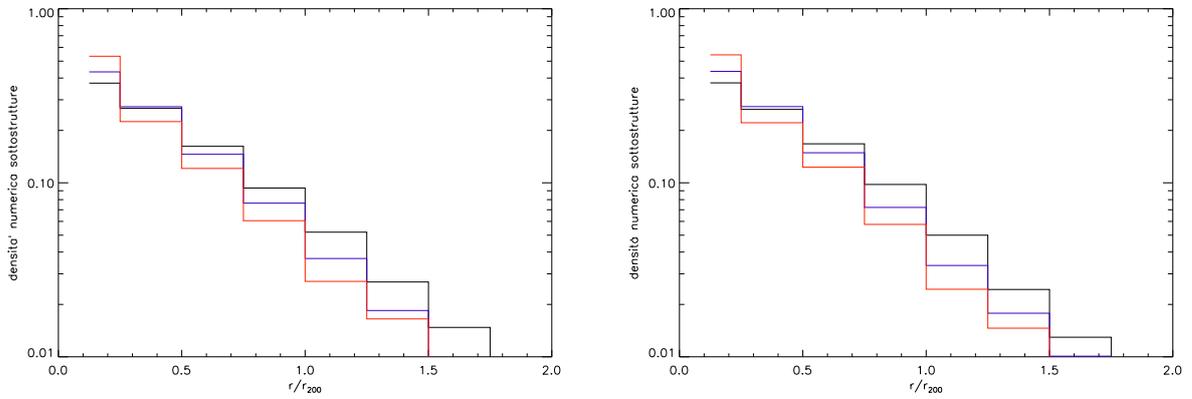


Figura 5.3: Profilo radiale della densità numerica di sottostrutture normalizzata al numero totale di sottostrutture. Il grafico a destra è per le simulazioni di sola DM mentre quello a sinistra è per le simulazioni di DM con gas. Le linee di diverso colore indicano il redshift: nero per $z=0$, blu per $z=0.5$ e rosso per $z=1$.

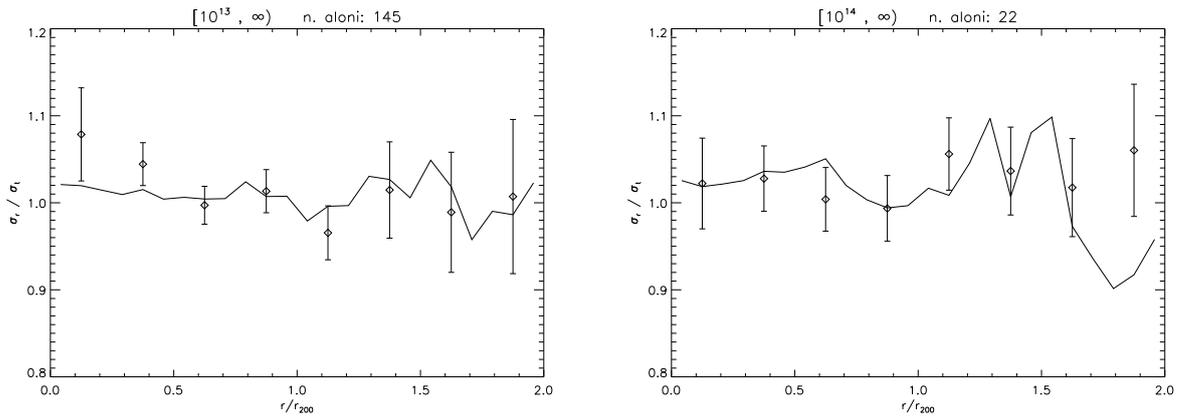


Figura 5.4: Profilo di anisotropia per simulazioni di sola DM ad alta risoluzione, a $z=1$ (a sinistra) e $z=0$ (a destra). I simboli sono relativi alle sottostrutture mentre la linea continua è per le particelle. Le barre d'errore sono a 1σ .

ad alta risoluzione. I risultati sono riportati in Figura 5.4 per le simulazioni di sola DM a $z=0$ e 1. Dato l'elevato tempo di calcolo e spazio su disco richiesto per l'analisi FoF e Subfind di queste simulazioni ad alta risoluzione, per questo test abbiamo utilizzato solo metà delle simulazioni, poichè l'analisi FoF e Subfind era già stata fatta. Notiamo infatti il maggior rumore dei dati e il minor numero di sottostrutture identificate. È tuttavia sufficiente per verificare che i risultati non presentano alcuna differenza da quelli delle

simulazioni a risoluzione inferiore. Pertanto il comportamento peculiare delle particelle e delle sottostrutture non è imputabile a fenomeni di risoluzione.

5.3.2 Profilo di dispersione radiale

In Figura 5.7 e 5.8 mostriamo i profili di dispersione di velocità radiale, normalizzata a v_{200} , rispettivamente per le particelle e per le sottostrutture. La disposizione dei pannelli è la medesima delle figure precedenti.

Particelle: possiamo notare una chiara dipendenza sia radiale che temporale. Per quanto riguarda le simulazioni di sola DM il profilo ha una veloce crescita, raggiunge il massimo circa a $0.2r_{200}$ per poi calare con regolarità. Il massimo ha un valore prossimo ad 1 per $z=1$, a $z=0.5$ raggiunge un valore di circa 0.85 per poi arrivare a $z=0$ ad un valore inferiore a 0.8. Il comportamento in presenza del gas è simile, ma il massimo è meno pronunciato e tende a presentare un appiattimento.

Sottostrutture: anche per le sottostrutture abbiamo dei profili ben delineati dai punti. Nella parte esterna non sembra esserci evoluzione temporale, mentre nella parte interna c'è un irripidimento del profilo a $z=0$ rispetto a quello, più piatto, a $z=1$. Il comportamento per le simulazioni con gas è sostanzialmente uguale.

Poichè il tasso di accrescimento a $z=1$ è maggiore che a $z=0$ possiamo pensare che a $z=1$ vi siano più particelle da poco accresciute. L'accrescimento avviene lungo filamenti pertanto σ_r è maggiore. Questo spiegherebbe l'evoluzione temporale del profilo di dispersione radiale delle particelle. Per le simulazioni con gas dobbiamo tenere conto della pressione di tale componente, che tende ad omogenizzare la dinamica del gas che sta accrescendo. Sottostrutture in caduta nell'amasso risentono della pressione del gas dell'alone. Esse vengono pertanto rallentate, e tale effetto è maggiore nelle regioni centrali dove la densità del gas è più alta, pertanto σ_r diminuisce maggiormente in tali zone avvicinandosi al valore assunto nelle zone esterne. Questo spiegherebbe i profili più piatti della dispersione radiale delle simulazioni con gas.

Nelle zone centrali l'azione della distruzione mareale è molto intenso. Le strutture più lente rimangono per più tempo in queste zone e pertanto è più probabile che vengano

distrutte. Ci aspettiamo dunque che col passare del tempo rimangano solo le sottostrutture più veloci. Questo è proprio quello che vediamo nei grafici dei profili radiali di dispersione di velocità radiale delle sottostrutture. Poichè abbiamo visto da Figura 5.6 che le orbite sono isotrope, ci aspettiamo che anche la componente tangenziale della velocità abbia un profilo pressochè identico a quello di Figura 5.8. Col passare del tempo le strutture lente vengono distrutte, pertanto osserviamo il comportamento delle strutture rimaste in vita che sono più veloci. Questo spiega l'aumento di σ_r al diminuire del redshift, e spiega anche perchè tale aumento sia presente solo nelle zone interne. È qui infatti che i meccanismi di distruzione mareale sono maggiormente efficaci. Considerazioni pressochè analoghe valgono per le simulazioni con gas.

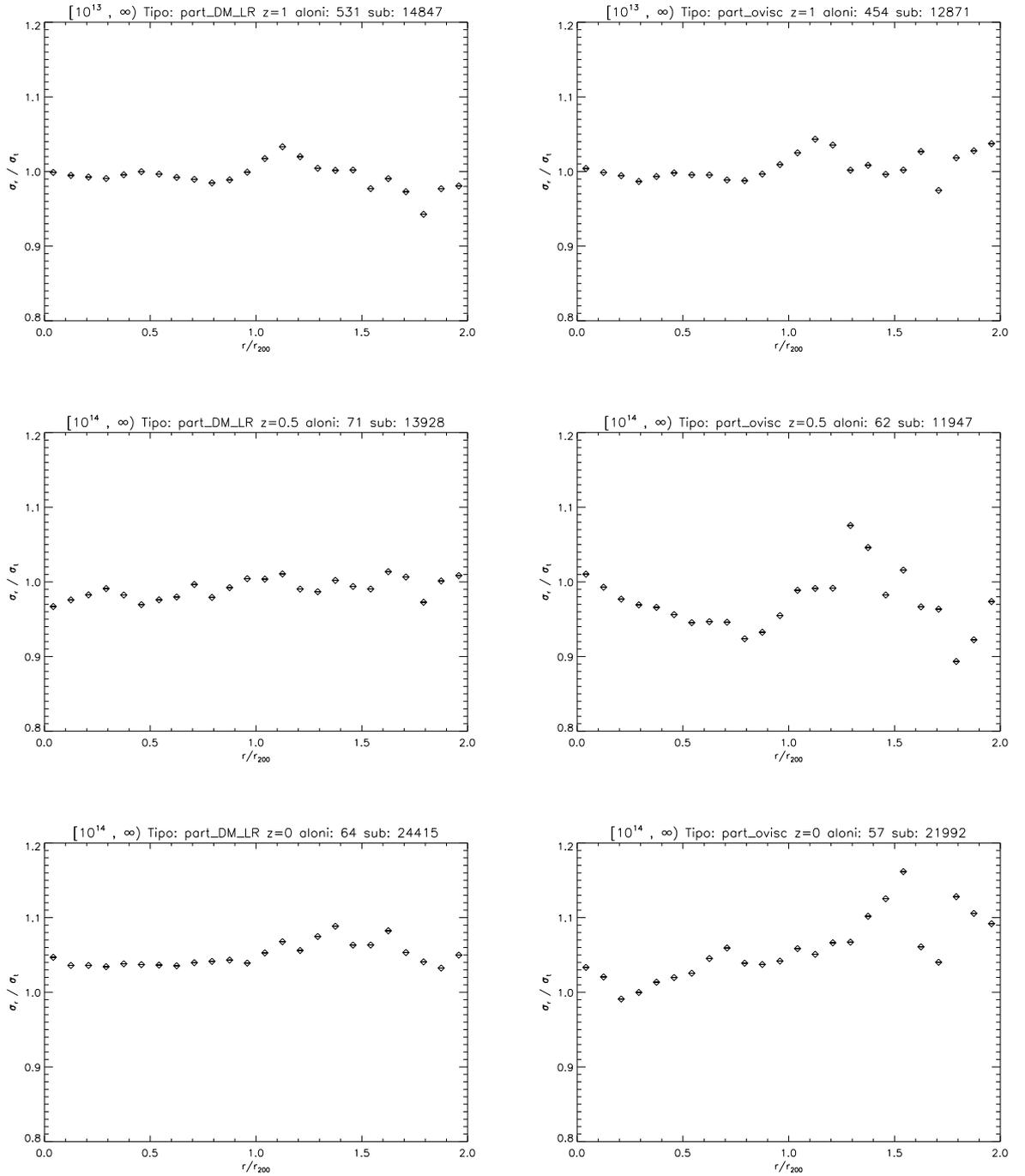


Figura 5.5: σ_r/σ_t per le simulazioni di sola DM (colonna a sinistra) e per le simulazioni con DM e gas (colonna a destra). I grafici in alto sono per $z=1$, quelli in mezzo per $z=0.5$ e quelli in basso per $z=0$. Le barre di errore ad 1σ sono più piccole del simbolo e pertanto non visibili.

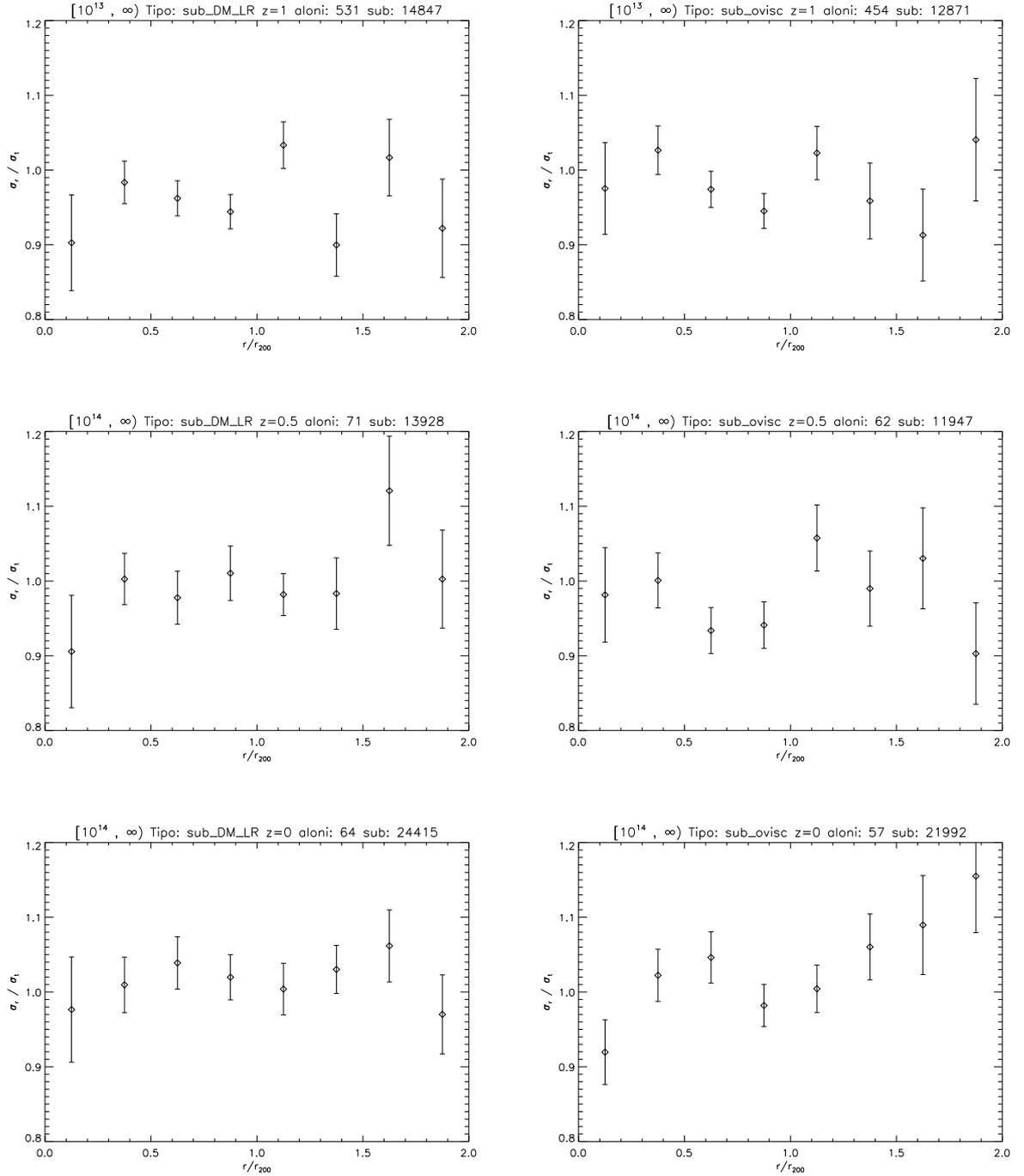


Figura 5.6: σ_r / σ_t per le sottostrutture in simulazioni di sola DM (colonna a sinistra) e in simulazioni con DM e gas (colonna a destra). I grafici in alto sono per $z=1$, quelli in mezzo per $z=0.5$ e quelli in basso per $z=0$. Sono mostrate le barre di errore ad 1σ .

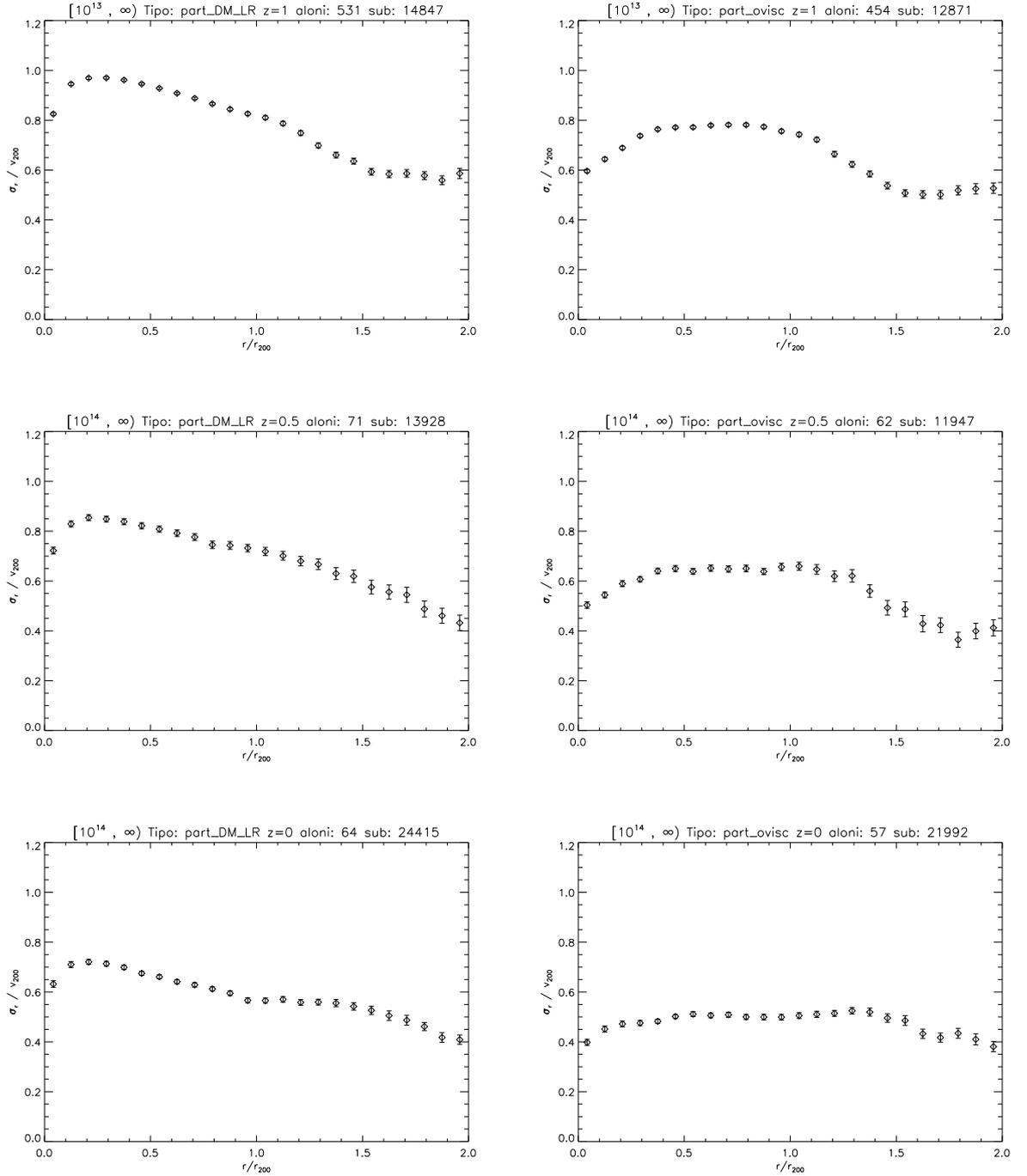


Figura 5.7: σ_r per le simulazioni di sola DM (colonna a sinistra) e per le simulazioni con DM e gas (colonna a destra). I grafici in alto sono per $z=1$, quelli in mezzo per $z=0.5$ e quelli in basso per $z=0$. Sono mostrate le barre di errore ad 1σ .

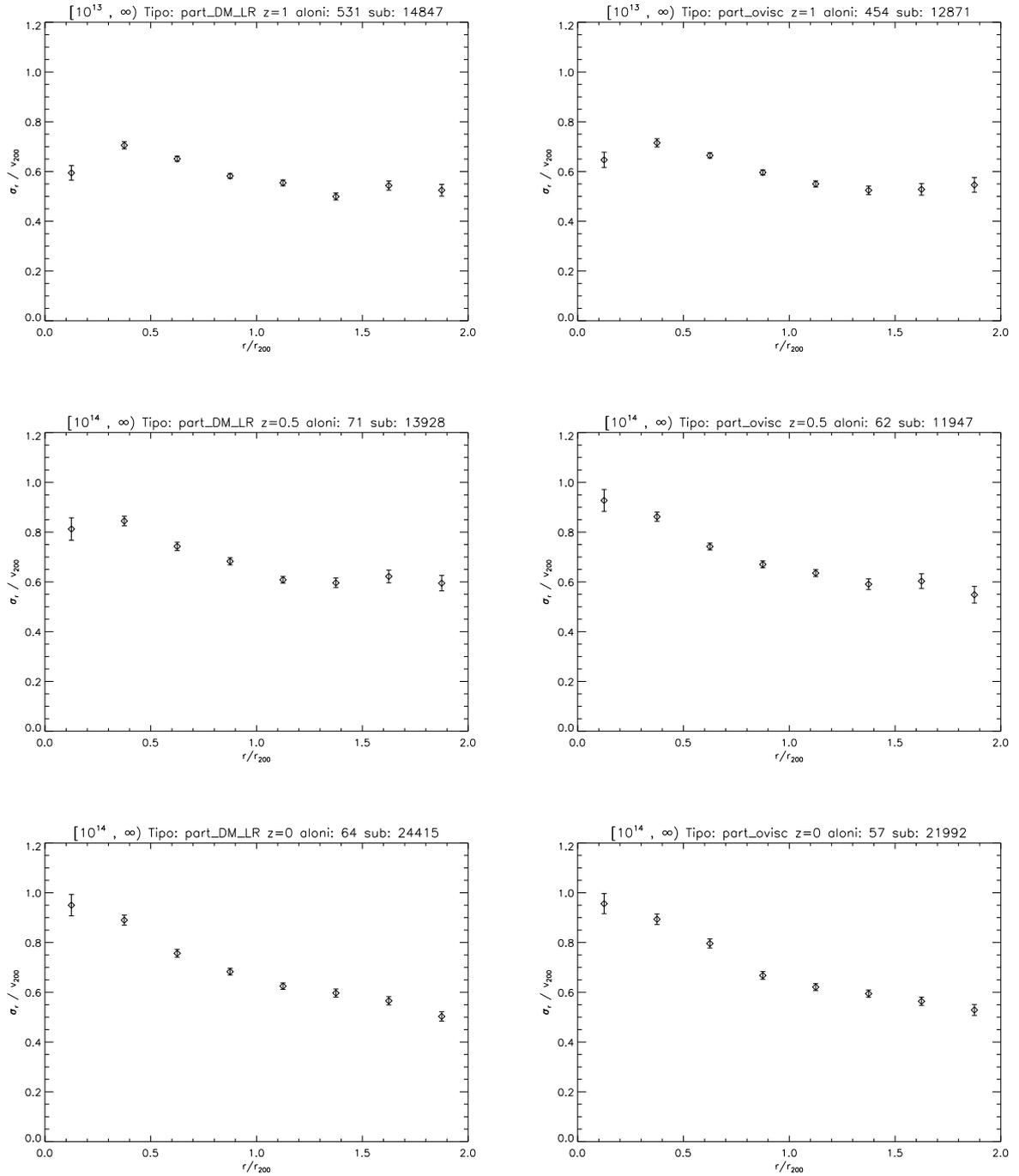


Figura 5.8: σ_r per le sottostrutture in simulazioni di sola DM (colonna a sinistra) e in simulazioni con DM e gas (colonna a destra). I grafici in alto sono per $z=1$, quelli in mezzo per $z=0.5$ e quelli in basso per $z=0$. Sono mostrate le barre di errore ad 1σ .

5.4 | Soluzione equazione di Jeans ed equilibrio

L'equazione di Jeans (vedi paragrafo 3.2) consente di ricavare il profilo cumulativo di massa a partire dalla dinamica degli oggetti che utilizziamo come traccianti del potenziale. Tale equazione l'abbiamo ricavata assumendo che la struttura oggetto di studio fosse in equilibrio. Un vantaggio delle simulazioni è che conosciamo tutte le quantità del sistema. Conosciamo dunque le quantità dinamiche così come il profilo cumulativo di massa. Possiamo allora utilizzare l'equazione di Jeans per verificare se una struttura è in equilibrio. Infatti utilizzando le quantità dinamiche dei traccianti di una struttura per risolvere questa equazione possiamo ricavare quale dovrebbe essere il profilo cumulativo di massa di tale struttura se fosse in equilibrio. Confrontandolo col profilo di massa vero possiamo dunque sapere se la struttura è in equilibrio o meno. Per comodità di lettura riportiamo l'equazione di Jeans:

$$M(r) = -\frac{r\sigma_r^2}{G} \left(\frac{d \ln v}{d \ln r} + \frac{d \ln \sigma_r^2}{d \ln r} + 2\beta \right) \quad (5.1)$$

Per poter calcolare le derivate dobbiamo interpolare i dati per ottenere un'espressione analitica da poter successivamente derivare. Per la densità numerica ν abbiamo scelto un profilo NFW (equazione 4.2) per le particelle, ed un profilo di King per le sottostrutture:

$$\nu(r) = \frac{\nu_0}{(1 + (c \cdot r)^2)^{3/2}} \quad (5.2)$$

In Figura 5.9 riportiamo a titolo di esempio il risultato del fit per la simulazione di sola DM a $z=0$. Notiamo come le funzioni scelte forniscano una buona descrizione dei dati. Abbiamo usato solo i punti entro r_{200} per l'interpolazione. Infatti le relazioni scritte sopra descrivono bene un sistema in equilibrio, e dopo r_{200} ci aspettiamo che non vi sia equilibrio per definizione stessa di r_{200} .

Per quanto riguarda il profilo di dispersione di velocità radiale abbiamo utilizzato delle curve polinomiali per interpolare i dati. Per essere sicuri che i risultati non fossero troppo sensibili alla scelta del polinomio, abbiamo risolto l'equazione di Jeans per polinomi di diverso grado, da 1 a 5. Nelle Figure 5.10 e 5.11 vediamo il risultato utilizzando come traccianti rispettivamente le particelle e le sottostrutture. La linea continua è il profilo di massa vero, ovvero la somma della massa di tutte le particelle entro una certa distanza. In realtà abbiamo rappresentato l'intervallo di confidenza di tale profilo, ma appare come

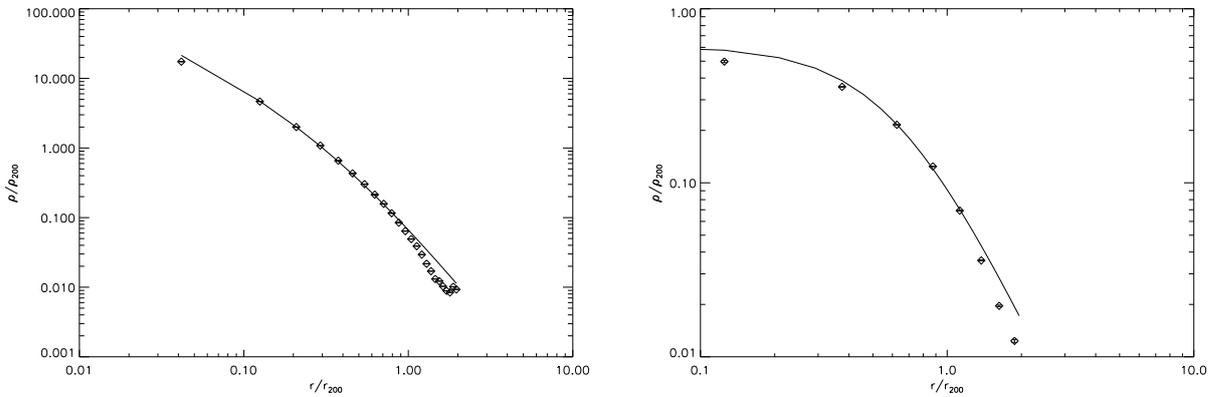


Figura 5.9: Dati e profili ottenuti per interpolazione dei profili di densità numerica delle particelle (a sinistra) e delle sottostrutture (a destra). Per le particelle abbiamo utilizzato un profilo NFW mentre per le sottostrutture un profilo di King. Questi due grafici sono per simulazioni di sola DM a $z=0$.

una singola linea in quanto gli errori sono molto piccoli. I punti sono invece ottenuti come soluzione dell'equazione di Jeans. I diversi simboli corrispondono ai diversi gradi dei polinomi utilizzati per interpolare σ_r . Gli errori sono rappresentati solo per il polinomio di grado 1, in quanto è il polinomio che rappresenta con minor precisione il profilo. Notiamo innanzitutto che entro r_{200} le soluzioni ottenute con diversi polinomi sono in accordo tra di loro. Questo prova che le soluzioni ottenute sono robuste in quanto non dipendono in modo sensibile dalla modalità di fit della derivata di σ_r . In entrambe le figure i pannelli di sinistra sono relativi alle simulazioni di sola DM, mentre quelli di destra sono per le simulazioni di DM con gas. I pannelli in alto sono per $z=1$, quelli centrali per $z=0.5$ e quelli inferiori per $z=0$. Per quanto riguarda le particelle nelle simulazioni di sola DM possiamo vedere che a $z=1$ la soluzione dell'equazione di Jeans prevede una distribuzione di massa diversa da quella reale. Questo vuol dire che le particelle non hanno ancora raggiunto l'equilibrio. Quello che ci aspettiamo in effetti è che ad alti redshift gli ammassi non siano in equilibrio, e solo dopo la fase di accrescimento violento raggiungano gradualmente uno stato di equilibrio. Questo è quello che infatti osserviamo in Figura 5.10 nei tre pannelli di sinistra. Vediamo che le soluzioni dell'equazione di Jeans si portano progressivamente verso la condizione di equilibrio, raggiunta entro r_{200} a $z=0$. Dopo tale distanza vediamo che i polinomi restituiscono soluzioni differenti. Tuttavia non siamo interessati al comportamento oltre r_{200} in quanto ci aspettiamo che non vi sia equilibrio nemmeno a $z=0$ per

definizione stessa di r_{200} (vedi paragrafo A.5). In Figura 5.11 possiamo notare come per entrambi i tipi di simulazione le sottostrutture siano in equilibrio già da $z=1$. Questi oggetti sono immersi nell'alone principale e subiscono frizione dinamica. Tale processo rallenta le sottostrutture e potrebbe pertanto portarle in equilibrio molto presto. Questo è in accordo con le orbite isotrope già a $z=1$ osservate in Figura 5.6. Infatti la frizione dinamica agisce nel verso del moto. Le sottostrutture in caduta nell'alone principale hanno un moto con componente radiale dominante. Ed è questa lungo questa componente che la sottostruttura viene maggiormente frenata. Il risultato è l'isotropia delle orbite e l'equilibrio con il potenziale. La frazione di massa totale in subaloni è relativamente piccola (varia dal 15% a $z=1$ al 17% a $z=0$) pertanto l'energia trasferita dalle sottostrutture all'alone principale per frizione dinamica è piccola e non influenza sostanzialmente l'energia della componente diffusa.

Tornando alla Figura 5.10, osservando le simulazioni con gas notiamo che apparentemente le particelle sembrano avere un comportamento opposto, ovvero sembrano allontanarsi dall'equilibrio. Tuttavia nel tracciare questi grafici abbiamo considerato particelle di DM e di gas indistintamente. Ma ciò non è corretto, in quanto l'equazione di Jeans è ricavata per la materia non collisionale, ed il gas è collisionale. Per questo motivo in Figura 5.12 riportiamo la medesima analisi per la componente di DM e di gas separatamente. Nella colonna di destra vediamo i risultati per la componente non collisionale. Come ci aspettiamo, tale componente è fuori equilibrio a $z=1$ e si avvicina all'equilibrio col passare del tempo. Il comportamento delle soluzioni è del tutto analogo a quello visto in Figura 5.10 per la componente di sola DM. Nella colonna di sinistra vediamo invece le soluzioni per il gas. Le soluzioni non si avvicinano mai alla distribuzione vera di massa, ma questo è dovuto al fatto che l'equazione di Jeans non si può applicare ad una componente collisionale.

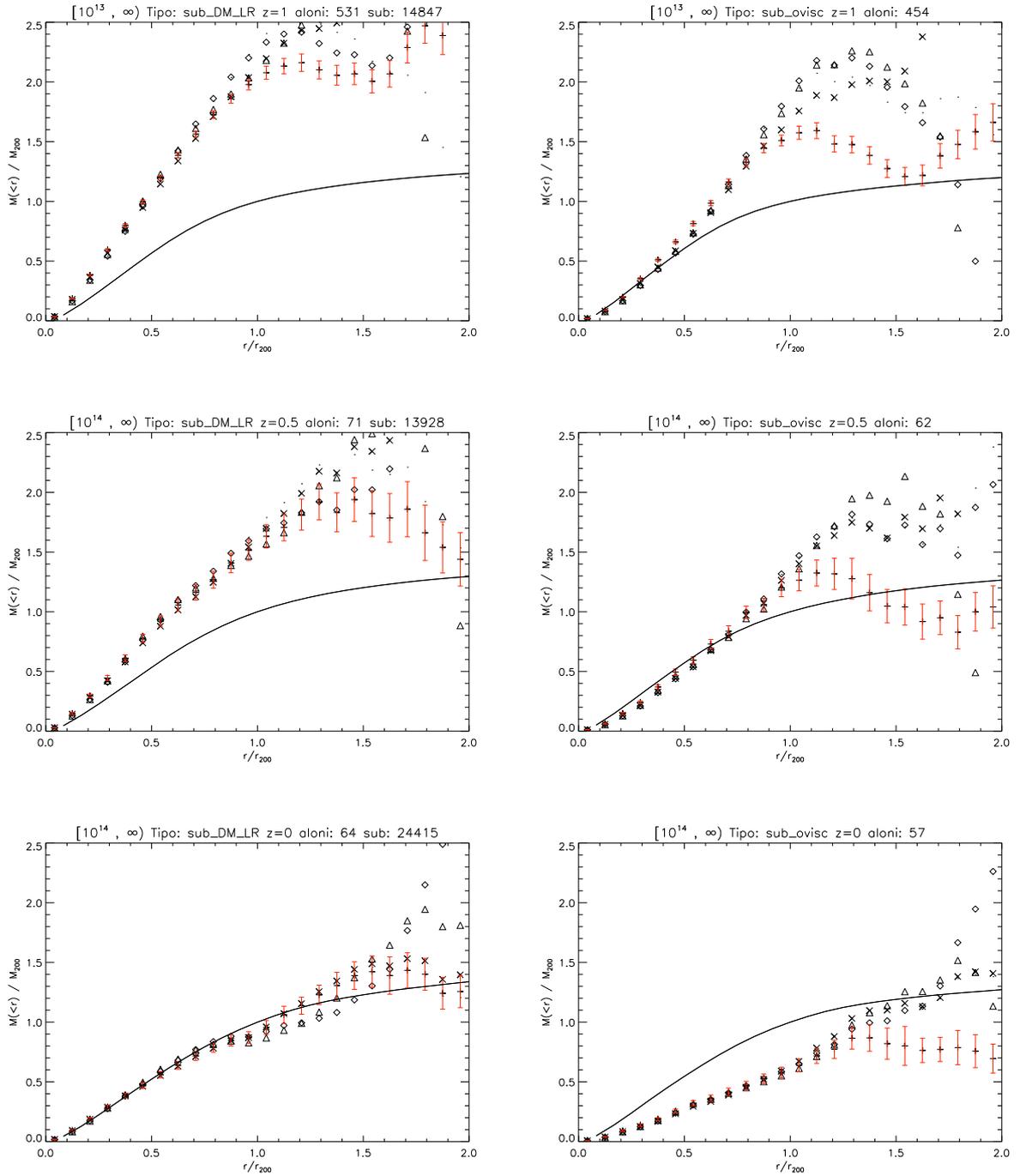


Figura 5.10: Equazione di Jeans per le simulazioni di sola DM (colonna a sinistra) e per le simulazioni con DM e gas (colonna a destra). I grafici in alto sono per $z=1$, quelli in mezzo per $z=0.5$ e quelli in basso per $z=0$.

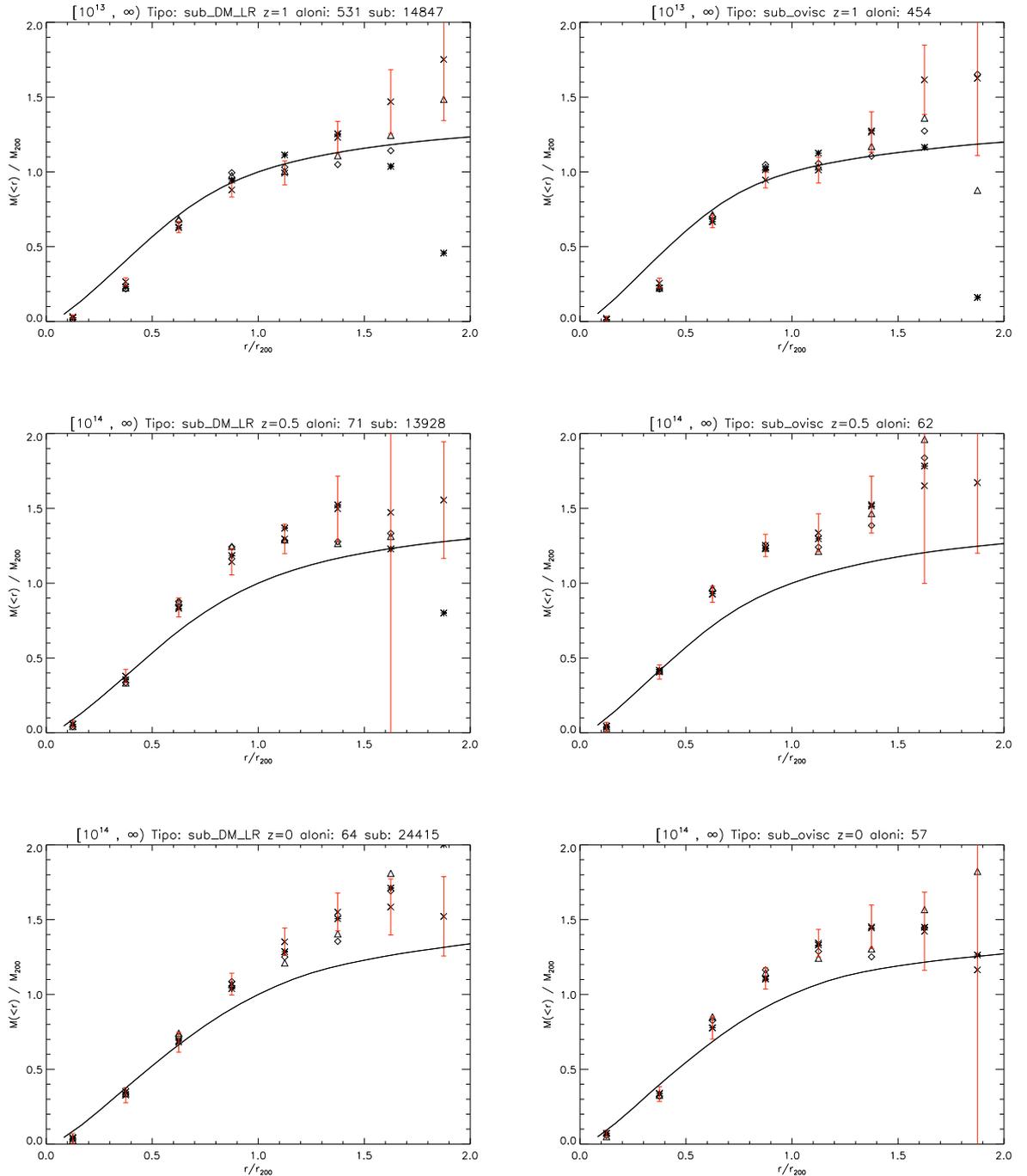


Figura 5.11: Equazione di Jeans per le sottostrutture in simulazioni di sola DM (colonna a sinistra) e in simulazioni con DM e gas (colonna a destra). I grafici in alto sono per $z=1$, quelli in mezzo per $z=0.5$ e quelli in basso per $z=0$.

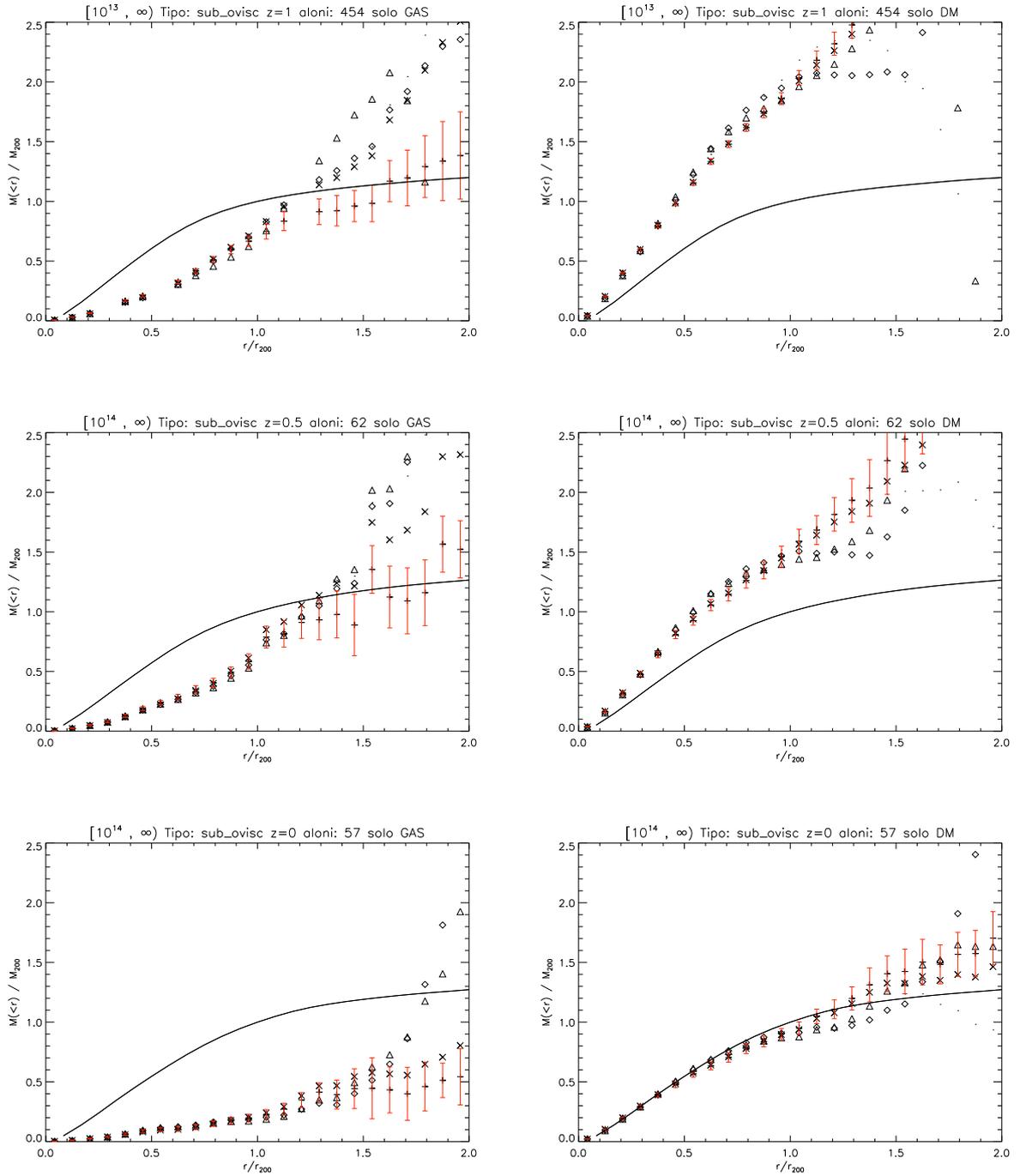


Figura 5.12: Equazione di Jeans per le simulazioni di DM e gas, considerando solo le particelle di gas (colonna a sinistra) e solo le particelle di DM (colonna a destra). I grafici in alto sono per $z=1$, quelli in mezzo per $z=0.5$ e quelli in basso per $z=0$.

Conclusioni

Il lavoro di tesi qui presentato è incentrato sullo studio della dinamica delle sottostrutture in simulazioni di ammassi di galassie. Precedenti studi, presentati nel Capitolo 4, hanno mostrato la presenza e l'importanza di fenomeni dinamici che perturbano le orbite delle sottostrutture all'interno degli ammassi. In un contesto cosmologico Λ CDM gerarchico le strutture si formano per merging di strutture inizialmente di massa comparabile e poi da un accrescimento di oggetti più piccoli. In quest'ultima fase il sistema rilassa verso una condizione di equilibrio. Il passaggio tra queste due fasi avviene a $z \sim 0.4$ come evidenziato in Lapi e Cavaliere (2009) e in Biviano e Poggianti (2009). In questo lavoro gli autori fanno notare che il campione osservativo da loro analizzato è ad un redshift superiore a 0.4 ed infatti osservano orbite anisotrope, con prevalenza di moti radiali dovuti al processo di infall ancora molto importante. Solo nel campione a basso redshift osservano l'isotropizzazione delle orbite. Nelle analisi da noi effettuate risulta invece uno scenario in cui le sottostrutture hanno raggiunto l'equilibrio già a $z=1$, probabilmente a causa di un forte effetto di frizione dinamica. La bassa frazione in massa costituita dalle sottostrutture non ci ha permesso però di osservare l'energia trasferita dalle sottostrutture al mezzo diffuso. Nonostante questa differenza rispetto ai risultati osservativi, i risultati da noi trovati sono autoconsistenti. L'isotropia delle sottostrutture è infatti supportata dalla soluzione dell'equazione di Jeans, che ci suggerisce che tali oggetti siano effettivamente in equilibrio già a $z=1$. L'equilibrio a redshift così elevati è un risultato molto importante. Il rapido sviluppo della strumentazione osservativa permetterà nei prossimi anni di studiare la dinamica di

molti ammassi ad alti redshift. In particolare, la futura missione ESA, EUCLID ¹, effettuerà una survey spettroscopica ad alto redshift. Lo scopo principale di tale missione sarà il miglioramento della comprensione della geometria dell'Universo, in particolare per quanto riguarda l'*energia oscura*. Tale missione prevede la messa in orbita di un satellite con specchio di 1.2 metri nel punto lagrangiano L2. Gli studi spettroscopici nel visibile e nel vicino infrarosso avranno come oggetto le galassie a redshift elevati, fino a $z \sim 2$. Volendo ottenere informazioni sulla massa degli ammassi che osserverà EUCLID è di fondamentale importanza sapere se le galassie che saranno osservate si potranno considerare buoni traccianti. La nostra analisi suggerisce che anche a redshift così elevati le sottostrutture sono in equilibrio, e che quindi dalla loro dinamica è possibile inferire la distribuzione di massa.

Un altro fenomeno importante per la comprensione della struttura e la dinamica degli ammassi è il processo di distruzione mareale. I risultati da noi trovati sono in accordo con i precedenti studi. Evidenze dirette di questo processo le possiamo trovare in Nagai e Kravtsov (2005) dove viene studiata la perdita di massa in funzione della distanza dal centro, o in Diemand, Moore e Stadel (2004) dove viene analizzata la distribuzione in velocità delle sottostrutture che risulta avere un eccesso ad alta velocità rispetto alla distribuzione gaussiana della componente diffusa di DM. Questo effetto causa un appiattimento del profilo radiale di densità numerica delle sottostrutture nelle parti interne dell'ammasso (Figura 4.1), dovuto alla distruzione delle sottostrutture in tale regione. Nella nostra analisi troviamo un profilo compatibile con quello della figura appena citata. I meccanismi di distruzione mareale sono dunque presenti nelle nostre simulazioni e in accordo con quanto trovato negli studi precedenti. Dal punto di vista osservativo questo fenomeno è visibile in Figura 4.15, dove possiamo osservare l'appiattimento dei profili tra il campione ad alto e basso redshift. Nelle nostre analisi abbiamo trovato ulteriori conferme di questo processo: mostrando in Figura 5.3 l'evoluzione temporale della densità numerica di sottostrutture possiamo infatti verificare che le sottostrutture sono distrutte nelle zone centrali mentre nelle zone esterne questo processo sembra non essere importante. Questi risultati sono importanti per comprendere il differenziale evolutivo che caratterizza le galassie in ambienti densi quali gli ammassi. Per esempio, la distruzione di galassie nelle regioni centrali è probabilmente responsabile dell'appiattimento del profilo di densità delle galassie di ammasso che si osserva da redshift 0.6 a redshift 0 (Biviano e Poggianti (2009)) nonché probabilmente dell'appiattimento della funzione di distribuzione delle luminosità

¹<http://sci.esa.int/euclid>

delle galassie nelle regioni centrali degli ammassi (Popesso et al. (2006)).

Le simulazioni che abbiamo utilizzato ci hanno permesso di studiare strutture composte di sola DM o di DM con gas. Mancavano processi radiativi che raffreddassero il gas consentendo la formazione stellare, così come fenomeni di feedback. La scelta di utilizzare questo tipo di simulazioni è dovuta al fatto che quest'ultimi fenomeni appena citati non dovrebbero influenzare la dinamica delle sottostrutture, in quanto riguardano prevalentemente la materia barionica che costituisce solo una piccola percentuale di tutta la massa degli ammassi. Tuttavia come abbiamo visto nel Capitolo 4 la componente stellare è più resistente alla distruzione mareale. In questo lavoro di tesi abbiamo sempre assunto che le sottostrutture fossero gli osservabili. Infatti è al centro di tali oggetti che pensiamo si formino le galassie. Tuttavia nelle zone più interne degli ammassi la distruzione mareale degli aloni di DM ma non della componente stellare crea un bias di cui bisogna tener conto se vogliamo confrontarci con le osservazioni. Un miglioramento alla nostra analisi può quindi essere l'utilizzo di simulazioni in cui vi siano fenomeni di cooling e quindi di formazione stellare. Un ulteriore miglioramento riguarda una più accurata scelta degli oggetti a diversi redshift. Nella nostra analisi abbiamo infatti effettuato un taglio in massa dell'alone principale, in quanto a redshift elevati ci aspettiamo (e verifichiamo) ammassi di dimensioni inferiori. Tuttavia facendo una selezione di questo tipo non stiamo necessariamente osservando a $z=1$ le strutture che faranno parte di sistemi più grandi a $z=0$. La costruzione di *merger tree* che tracciano la storia evolutiva di ogni alone ci fornirà informazioni più accurate sull'evoluzione delle strutture. Infine, per facilitare il confronto con le osservazioni, sarà necessario considerare gli effetti di proiezione sulle varie quantità (velocità, posizioni, densità) in modo da riprodurre nel modo più accurato possibile la situazione osservativa, rendendo quindi possibile un confronto immediato dei risultati teorici con le osservabili.

Formazione delle strutture cosmiche

La teoria di formazione delle strutture cosmiche si basa sul *criterio di instabilità di Jeans*. Inizialmente sviluppato per comprendere il collasso di nubi di gas, tale metodo risultò applicabile ad un qualunque fluido, e fu usato per comprendere i meccanismi di formazione delle strutture cosmiche che oggi osserviamo. Quello che si può dimostrare, infatti, è che partendo da un campo di densità $\rho(\vec{x})$ mediamente omogeneo ed isotropo, piccole perturbazioni $\delta\rho(\vec{x})$ creano instabilità che possono crescere col tempo. Si pensi ad esempio ad un fluido soggetto alla sola propria autogravità, e si pensi ad una regione sferica di raggio λ in cui la densità di tale fluido sia leggermente maggiore della densità media ρ . A causa della gravità tale fluttuazione $\delta\rho/\rho$ tende a crescere. Il collasso sarà però contrastato dalla forza di pressione. Vi sarà instabilità, e quindi collasso, se la forza gravitazionale per unità di massa F_g eccederà la forza di pressione per unità di massa F_p , ovvero:

$$F_g \simeq \frac{GM}{\lambda^2} \simeq \frac{G\rho\lambda^3}{\lambda^2} > F_p \simeq \frac{p\lambda^2}{\rho\lambda^3} \simeq \frac{v_s^2}{\lambda} \quad (\text{A.1})$$

dove v_s è la velocità del suono nel mezzo e p la pressione. Da questa relazione otteniamo dunque una relazione che indicativamente ci suggerisce le scale su cui può avvenire il collasso:

$$\lambda > \lambda_J = \frac{v_s}{(G\rho)^{1/2}} \quad (\text{A.2})$$

λ_J è chiamata lunghezza di Jeans. Se definiamo il tempo dinamico

$$t_{dyn} = (G\rho)^{-1/2} \quad (\text{A.3})$$

come il tempo necessario ad una particella test per raggiungere il centro di un corpo omogeneo, sottoposta alla sola forza di gravità, l'equazione (A.2) può essere anche letta nel seguente modo: il sistema è instabile su una scala λ se il tempo dinamico è minore del tempo che impiega un'onda sonora ad attraversare tale scala ($t_s \simeq \lambda/v_s$). Ovvero la pressione non riesce a contrastare il collasso gravitazionale.

A.1 | Approssimazione newtoniana

L'Universo è descrivibile mediante la relatività generale. In particolare la metrica di Robertson-Walker fornisce la descrizione dello spazio tempo dell'Universo:

$$ds^2 = (c dt)^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] \quad (\text{A.4})$$

dove K è il parametro di curvatura, ed $a(t)$ è il fattore di espansione. In quest'ultimo termine è stata raccolta la dipendenza temporale della parte spaziale della metrica.

I fenomeni che portano alla formazione delle strutture cosmiche sono tuttavia descrivibili in approssimazione newtoniana. Il teorema di Birkhoff afferma che un campo gravitazionale a simmetria sferica in uno spazio vuoto è statico ed è descritto da una metrica di Schwarzschild (che è la metrica nello spazio vuoto generata da un punto massa).

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) (c dt)^2 - \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] \quad (\text{A.5})$$

con $r_0 = 2GM/c^2$. In particolare pensiamo di applicare questo teorema nel caso di una distribuzione sferica omogenea di massa-energia al centro di una cavità vuota. Allora, anche se tale distribuzione non è statica, la metrica nella parte vuota della cavità rimarrà statica, e quindi purchè si mantenga la simmetria sferica la componente esterna e quella interna non interagiscono. Pensiamo che la distribuzione interna sia una sfera di massa m e raggio l . Se l è tale che

$$\frac{Gm}{lc^2} \ll 1 \quad (\text{A.6})$$

allora la metrica tenderà alla metrica di Minkowski, e se le velocità del sistema sono molto minori di c sarà dunque possibile usare la meccanica Newtoniana. Rimane da valutare quali siano le distanze su cui è possibile applicare tale approssimazione. Poichè abbiamo che $M \sim \rho l^3$ otteniamo che la scala su cui è valida l'approssimazione newtoniana è

$$l \ll c \cdot (G\rho)^{-1/2} \quad (\text{A.7})$$

Ma dalla prima equazione di Friedmann abbiamo che $(G\rho)^{-1/2} \sim H$ dove H è il parametro di Hubble ($H = \dot{a}/a$). L'equazione (A.7) diventa quindi

$$l \ll \frac{c}{H} \simeq R_H \quad (\text{A.8})$$

ovvero entro l'orizzonte possiamo applicare l'approssimazione newtoniana.

Il teorema di Birkhoff come descritto sopra è in realtà applicabile anche se al posto della cavità vuota abbiamo una distribuzione di massa-energia a densità minore di quella della sfera centrale e del background. È quindi giustificata l'applicazione delle relazioni appena viste alle perturbazioni di densità dell'Universo.

A.2 | La statistica del campo di densità

Quanto visto nell'introduzione di questo capitolo è una descrizione che ci permette di capire solo qualitativamente il fenomeno del collasso. Una descrizione più dettagliata di tale processo sarà l'oggetto dei prossimi paragrafi. Prima è però necessario introdurre alcuni strumenti statistici che risulteranno utili per quanto seguirà.

Sia $\rho(\vec{x})$ il campo di densità dell'Universo e $\bar{\rho}$ la densità media. Possiamo definire il *contrasto di densità*:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (\text{A.9})$$

Per definizione sarà dunque $\bar{\delta} = 0$ e $\delta(\vec{x}) \geq -1$. Poichè spesso si tratteranno fenomeni che agiscono su determinate scale di grandezza, risulta molto comodo passare in notazione di Fourier. Consideriamo un volume $V = L^3$ che è il massimo volume entro cui possiamo pensare esserci strutture generate da perturbazioni del campo di densità. Ovvero è il volume entro cui possiamo considerare periodico l'Universo. Tale affermazione è da considerarla come un artificio che risulta comodo per la descrizione matematica che seguirà. Ma sarà sempre possibile fare il limite $V \rightarrow \infty$. La serie di Fourier del contrasto di densità risulta dunque essere

$$\delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \hat{\delta}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \sum_{\vec{k}} \hat{\delta}_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (\text{A.10})$$

Le condizioni al contorno che devono essere soddisfatte sono

$$\delta(L, y, z) = \delta(0, y, z) \quad (\text{A.11})$$

e analoghe per le altre componenti. Tali condizioni implicano le seguenti relazioni per \vec{k} :

$$k_i = n_i \frac{2\pi}{L} \quad i = x, y, z \quad (\text{A.12})$$

con n_i numeri interi. I coefficienti di Fourier sono dati dalla seguente relazione:

$$\hat{\delta}_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \int_V \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x \quad (\text{A.13})$$

Se $V \rightarrow \infty$ i \vec{k} tendono ad una distribuzione continua ed è pertanto possibile scrivere

$$\delta(\vec{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k \quad (\text{A.14})$$

Notiamo che poichè su grande scala si vuole ottenere omogeneità ed isotropia dev'essere $\hat{\delta}_{\vec{k}=0} = 0$. Inoltre poichè δ è una quantità reale deve valere la seguente relazione: $\hat{\delta}_{\vec{k}} = \hat{\delta}_{-\vec{k}}^*$. Si potrebbe obiettare che cambiando il volume V avrei differenti coefficienti di Fourier e quindi otterrei una diversa realizzazione dell'Universo. Un modello cosmologico può cioè predire proprietà statistiche dei campi. Tali proprietà vanno intese come la probabilità di avere una particolare realizzazione di Universo, dato un modello cosmologico. In realtà però noi abbiamo un solo Universo osservabile, mentre un dato modello cosmologico predice proprietà su un *ensemble* di modelli. Il *Principio Ergodico* ci permette di superare questa difficoltà. Esso afferma che la media sulle ensembles diviene una media spaziale su porzioni di Universo.

A.2.1 La varianza

Abbiamo visto che il valor medio di $\delta(\vec{x})$ è nullo per definizione. Ma così non è il valor medio del suo quadrato, ovvero la varianza.

$$\sigma^2 \equiv \langle \delta^2 \rangle = \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}^2 \quad (\text{A.15})$$

dove la media si intende fatta su un ensemble di realizzazioni. Se ora facciamo il limite $V \rightarrow \infty$, e assumiamo che il campo di densità sia statisticamente omogeneo ed isotropo, cosicchè non vi sia dipendenza sulla direzione di \vec{k} ma solo sul modulo $k = |\vec{k}|$, otteniamo

$$\sigma^2 \equiv \langle \delta^2 \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}^2 \rightarrow \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk \quad (\text{A.16})$$

dove per semplicità abbiamo posto $P(k) = \delta_k^2 = |\delta_k|^2$. La quantità $P(k)$ è detto *spettro di potenza*. Notiamo che la varianza non ha dipendenze spaziali, ma solo temporali (δ_k può evolvere nel tempo). Pertanto σ^2 non ci dà informazioni spaziali, ma solo sull'ampiezza delle perturbazioni.

Entro un certo intervallo di k si è soliti assumere uno spettro di potenza dato da una legge di potenza:

$$P(k) = Ak^n \quad (\text{A.17})$$

dove n è chiamato *indice spettrale*. Affinchè l'integrale (A.16) possa convergere devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$n > -3 \quad \text{per } k \rightarrow 0 \quad (\text{A.18a})$$

$$n < -3 \quad \text{per } k \rightarrow \infty \quad (\text{A.18b})$$

A.2.2 Scale di filtraggio

Anche se quanto detto fin'ora è formalmente corretto, la varianza così definita non è un osservabile. Perchè sia tale bisogna specificare la scala su cui viene effettuata la misura. Per comprendere meglio ciò, si pensi ad una distribuzione di galassie. Selezioniamo le galassie all'interno di una sfera. Se il raggio di tale sfera è piccolo potrò apprezzare le fluttuazioni su piccola scala. Ma se ad esempio la distribuzione su grande scala è omogenea allora all'aumentare della dimensione della sfera di campionamento le fluttuazioni scenderanno. È pertanto conveniente considerare le fluttuazioni del campo su una certa scala spaziale o, equivalentemente, su una certa scala in massa, che risulterà quindi essere una sorta di scala di risoluzione. Parlare di scala in massa o in dimensione è analogo in quanto strutture di massa M derivano dal collasso di una perturbazione iniziale di dimensione $R \propto (M/\bar{\rho})^{1/3}$. La fluttuazione di densità su tale scala sarà pertanto

$$\delta_R(\vec{x}) = \delta_M(\vec{x}) = \int \delta(\vec{y}) W_R(|\vec{x} - \vec{y}|) d^3y \quad (\text{A.19})$$

dove W è una funzione finestra che dipende da come è fatto il volume su cui sto campionando. La fluttuazione su una certa scala è cioè la *convoluzione* tra il campo di fluttuazione di densità e tale funzione finestra. Se ad esempio prendiamo per W una funzione top-hat, i modi delle fluttuazioni con lunghezza d'onda maggiore di R saranno esclusi dall'analisi. Dalla definizione di varianza (equazione (A.16)) avremo dunque

$$\sigma_R^2 = \sigma_M^2 = \langle \delta_R^2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int k^2 P(k) \hat{W}_R^2(k) dk \quad (\text{A.20})$$

dove $\hat{W}_R^2(k)$ è la trasformata di Fourier della funzione finestra. Si noti che per motivi dimensionali sarà $W_R(k) = W(kR)$.

Una prima considerazione importante che possiamo fare grazie a questi strumenti statistici riguarda la crescita delle perturbazioni a diverse scale. Se supponiamo di avere uno spettro di potenza come quello dell'equazione (A.17), la varianza su scala M sarà

$$\sigma_M^2 = \frac{A}{2\pi^2} \int_0^\infty k^{2+n} W^2(kR) dk = \frac{A}{2\pi^2} R^{-(n+3)} \int_0^\infty k'^{2+n} W^2(k'R) dk' \quad (\text{A.21})$$

Quello che si osserva su scale di alcuni Mpc (Cole et al. (2005)) è $n \sim -1.2$. Allora al calare di R la varianza sulla scala M cresce. Ovvero andando a scale sempre più piccole la varianza cresce. Questo è quanto mi aspetto in uno *scenario gerarchico*. La potenza è sempre più alta sulle scale più piccole, e dunque quest'ultime sono le prime a diventare non lineari. Ovvero le prime strutture che si formano dal collasso sono quelle piccole, e successivamente si formano strutture su scale via via più grandi.

A.3 | Evoluzione lineare del campo di densità per un fluido collisionale

In questa sezione vogliamo vedere come evolvono delle perturbazioni del campo di densità inizialmente piccole. Affrontiamo innanzitutto il problema più generale, ovvero considerando un fluido collisionale. Nella sezione successiva ricaveremo un caso particolare, ovvero l'evoluzione per un fluido non collisionale (la DM è la componente principale in massa dell'Universo ed è non collisionale). Poichè le fluttuazioni del campo di densità subito dopo l'inflazione sono piccole, possiamo studiare la loro crescita in approssimazione lineare. Tale approssimazione verrà meno quando le perturbazioni, crescendo, raggiungeranno un valore tale per cui $\delta \simeq 1$.

Le equazioni che governano un fluido autogravitante collisionale sono:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{Equazione di continuità} \quad (\text{A.22a})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} \phi \quad \text{Equazione di Euler} \quad (\text{A.22b})$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad \text{Equazione di Poisson} \quad (\text{A.22c})$$

L'equazione di continuità esprime la conservazione della massa, l'equazione di Euler fornisce la relazione che lega l'accelerazione di un elemento di fluido alle forze (gravitazionale e di pressione) che l'hanno generata ed infine l'equazione di Poisson specifica la natura Newtoniana della forza gravitazionale. Vogliamo ora riscrivere questo set di equazioni in coordinate comoventi, mediante le seguenti relazioni:

$$\vec{r}(t) = a(t) \cdot \vec{x} \quad (\text{A.23a})$$

$$\dot{\vec{r}} = H\vec{r} + a\vec{u} = \text{flusso di Hubble} + \text{velocità peculiare } \delta v \quad (\text{A.23b})$$

$$\vec{\nabla} = a^{-1}\vec{\nabla}_x \quad (\text{A.23c})$$

dove \vec{x} è la coordinata comovente ed $a(t)$ il fattore di espansione dell'Universo. Per alleggerire la notazione, con $\vec{\nabla}$ intenderemo ora $\vec{\nabla}_x$. Il set di equazioni (A.22) diviene quindi

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \vec{\nabla}[(1 + \delta)\vec{u}] = 0 \quad (\text{A.24a})$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2H\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}(\delta p)}{\bar{\rho}a^2} - \frac{\vec{\nabla}(\delta\phi)}{a^2} \quad (\text{A.24b})$$

$$\nabla^2(\delta\phi) = 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta \quad (\text{A.24c})$$

dove $\delta\phi$ e δp sono le perturbazioni al potenziale e alla pressione. Formalmente molto simili al set di equazioni (A.22), queste equazioni differiscono per la presenza del termine $2H\vec{u}$. Tale termine, chiamato *Hubble drag*, ha l'effetto di una forza viscosa, dovuta in questo caso al background in espansione che si oppone alla crescita di velocità peculiari.

Il sistema di equazioni (A.24) diventa quindi

$$\frac{\partial \hat{\delta}_{\vec{k}}}{\partial t} + i\vec{k} \cdot \vec{u}_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}'} i\hat{\delta}_{\vec{k}'} \cdot (\vec{k} \cdot \hat{u}_{\vec{k}-\vec{k}'}) = 0 \quad (\text{A.25a})$$

$$\frac{\partial \hat{u}_{\vec{k}}}{\partial t} + 2H\hat{u}_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}'} i[\hat{u}_{\vec{k}'} \cdot (\vec{k} - \vec{k}')] \hat{u}_{\vec{k}-\vec{k}'} = -\frac{i\vec{k}(\delta\hat{p}_{\vec{k}})}{\bar{\rho}a^2} - \frac{i\vec{k}(\delta\hat{\phi}_{\vec{k}})}{a^2} \quad (\text{A.25b})$$

$$\delta\hat{\phi}_{\vec{k}} = -4\pi G\bar{\rho}a^2 \frac{\hat{\delta}_{\vec{k}}}{|\vec{k}|^2} \quad (\text{A.25c})$$

Quello che vogliamo ora ottenere è un sistema di equazioni per piccoli contrasti di densità ($\delta \ll 1$). Inizialmente infatti ci aspettiamo piccole fluttuazioni del campo di densità, sorte dopo l'inflazione. Possiamo dunque linearizzare il sistema (A.25). Notiamo subito un aspetto molto importante. In (A.25a) e (A.25b) i termini del second'ordine sono quelli dentro la sommatoria. Ma questi termini sono anche gli unici che accoppiano diversi modi di Fourier. Linearizzando queste equazioni otterrò un sistema di equazioni in cui modi di

Fourier diversi evolvono indipendentemente. Ma il teorema del limite centrale afferma che un numero infinito di modi tra loro indipendenti genera un campo gaussiano. Se i modi di Fourier sono indipendenti all'inizio ed evolvono in modo indipendente, allora la perturbazione continua ad essere gaussiana. Questa è la caratteristica delle perturbazioni in regime lineare, e che verrà meno non appena il contrasto di densità diverrà confrontabile se non addirittura superiore ad 1.

Linearizzando il sistema e combinando tra loro le equazioni (A.25) si ottiene la seguente relazione:

$$\boxed{\ddot{\delta}_{\vec{k}}(t) + 2H\dot{\delta}_{\vec{k}}(t) + \left(\frac{v_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\bar{\rho}\right)\delta_{\vec{k}}(t) = 0} \quad (\text{A.26})$$

con $v_s^2 = \partial P / \partial \rho$.

A.4 | Evoluzione lineare del campo di densità per un fluido non collisionale

La DM è la componente in massa maggiore nell'Universo. La dinamica delle strutture cosmiche è pertanto dominata dal comportamento di tale componente, che è non collisionale. È quindi di estremo interesse studiare il criterio di instabilità per un fluido di questo tipo. Consideriamo quindi l'equazione (A.26) e trascuriamo il termine di pressione. Otteniamo

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}}(t) + 2H\dot{\delta}_{\vec{k}}(t) - 4\pi G\bar{\rho}\delta_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (\text{A.27})$$

Si può dimostrare che la soluzione di tale equazione è data da un modo crescente (D_+) ed uno decrescente (D_-):

$$\hat{\delta}_{\vec{k}}(t) = A_{\vec{k}}D_+(t) + B_{\vec{k}}D_-(t) \quad (\text{A.28})$$

La soluzione che ci interessa è quella crescente, in quanto è la soluzione che porta ad un incremento del contrasto di densità e quindi alla formazione di strutture sempre più dense fino alla formazione delle strutture cosmiche come le vediamo oggi. Per la soluzione crescente si può dimostrare che vale la seguente relazione:

$$D_+(z) = E(z)G(z) \quad (\text{A.29})$$

con

$$E(z) = \frac{H(z)}{H_0} = [\Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0k}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda}]^{1/2} \quad (\text{A.30})$$

$$G(z) = \frac{5}{2}\Omega_{0m} \int_z^{+\infty} \frac{1+z'}{E(z')^3} dz' \quad (\text{A.31})$$

In figura (A.1) viene mostrata la dipendenza del fattore di crescita delle perturbazioni in funzione dal redshift per tre modelli cosmologici differenti: un modello EdS, e due modelli con $\Omega_m = 0.3$, uno con costante cosmologica ed uno senza. L'evoluzione più rapida è per un Universo EdS, mentre la crescita delle perturbazioni è più lenta per un Universo a bassa densità senza costante cosmologica.

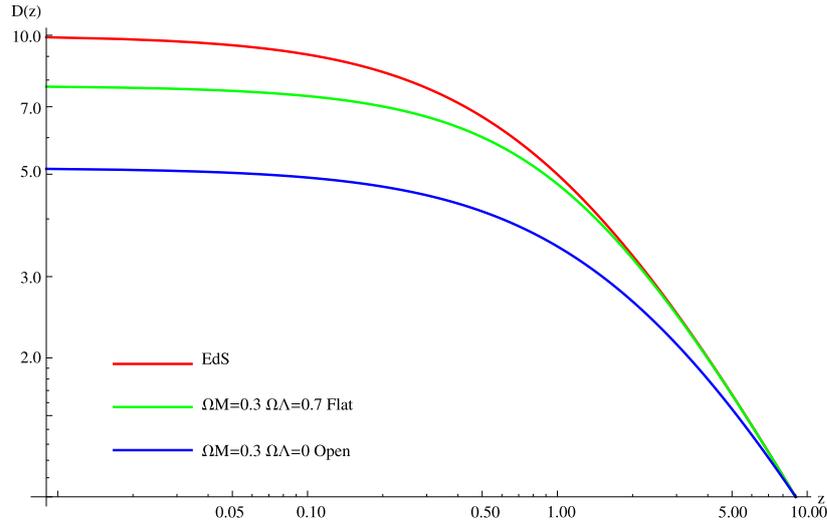


Figura A.1: Dipendenza del fattore di crescita delle perturbazioni in funzione dal redshift per tre modelli cosmologici: Universo piatto EdS ($\Omega_m = 1$), Universo piatto con costante cosmologica ($\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$) e modello aperto senza costante cosmologica ($\Omega_m = 0.3$). Gli andamenti sono stati normalizzati ad un redshift arbitrario ($z=10$) per mostrare le differenze di ampiezze oggi pur essendo partiti da ampiezze uguali, e quindi evidenziare le differenti velocità di crescita delle perturbazioni.

Per capire il tipo di comportamento delle soluzioni, restringiamoci ad un caso semplice. Consideriamo un Universo dominato dalla materia (MD: *matter dominated* - l'Universo è descrivibile con buona approssimazione con un modello di Einstein - de Sitter) in cui cioè $\Omega_m = 1$ e $\Omega_\Lambda = 0$. Per tale modello valgono le seguenti relazioni:

$$a(t) \sim t^{2/3} \quad ; \quad 4\pi G\bar{\rho} = \frac{2}{3t^2} \quad ; \quad H = \frac{2}{3t} \quad (\text{A.32})$$

che sostituite nell'equazione (A.27) danno

$$\ddot{\delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_k - \frac{2}{3t^2}\delta_k \quad (\text{A.33})$$

Sostituendo la (A.28) in questa equazione otteniamo

$$D_+(t) \sim t^{2/3} \sim a \quad ; \quad D_-(t) \sim t^{-1} \quad (\text{A.34})$$

ovvero il contrasto di densità cresce, indipendentemente dal modo d'onda considerato, con lo stesso tasso dell'espansione dell'Universo. In maniera più qualitativa, ma anche più intuitiva, si può comprendere meglio questo risultato facendo considerazioni sui tempi scala dei fenomeni considerati. Già abbiamo visto (eq. (A.3)) che $t_{dyn} \sim (G\rho)^{-1/2}$, dove ρ è la densità della perturbazione. Dalla prima equazione di Friedmann abbiamo che

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} \sim t^{-2} \quad (\text{A.35})$$

dove si è usata l'equazione (A.32) per l'ultima uguaglianza. Possiamo allora definire un tempo caratteristico di espansione t_{exp} :

$$t_{exp} \sim (G\bar{\rho})^{-1/2} \quad (\text{A.36})$$

dove $\bar{\rho}$ è la densità media dell'Universo. Poichè siamo in regime lineare, il contrasto di densità è piccolo, ovvero la densità della perturbazione è circa uguale alla densità media dell'Universo. Quindi

$$\rho \simeq \bar{\rho} \implies t_{dyn} \simeq t_{exp} \quad (\text{A.37})$$

ovvero il rate a cui cresce la perturbazione è circa uguale a quello con cui si espande l'universo.

A.5 | Il collasso sferico

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto come evolvono piccole perturbazioni del campo di densità. In particolare dall'equazione (A.34) si vede che le perturbazioni aumentano di ampiezza col passare del tempo. Ci sarà un momento in cui $\delta > 1$. Ricordiamo che alla base dell'analisi fatta fin'ora c'è la condizione che il contrasto di densità sia minore di uno. Quindi il campo di densità arriverà ad avere zone con densità troppo elevate per essere descritte correttamente dall'equazione (A.34) o dalla (A.29). Infatti, come avremo modo di vedere nei capitoli successivi, gli ammassi di galassie hanno contrasti di densità con valori anche di diverse centinaia.

Una trattazione in approssimazione lineare non è più possibile. Il regime non lineare è molto più complicato da affrontare analiticamente, e soluzioni esatte si possono trovare solo

per sistemi con una geometria estremamente semplice. In questa sezione vedremo infatti l'evoluzione delle perturbazioni in regime non lineare per una sovradensità a simmetria sferica. È chiaramente un caso idealizzato, ma ci fornisce risultati che danno un'ottima indicazione del tipo di comportamenti che ci si dovrebbe aspettare quando si osservano contrasti di densità elevati.

Pensiamo dunque ad una perturbazione iniziale sferica, di densità costante che ha un'ampiezza positiva ma ancora piccola. Chiamiamo t_i tale momento iniziale, e assumiamo di essere in un periodo MD. La perturbazione si sta espandendo con l'Universo e pertanto ai bordi avrà velocità peculiari u_i nulle. Data la simmetria del problema possiamo vedere questa fluttuazione del campo di densità come un universo a parte, che evolve secondo il proprio modello cosmologico. Possiamo dunque applicare la (A.34):

$$\delta = \delta_+(t_i) \left(\frac{t}{t_i}\right)^{2/3} + \delta_-(t_i) \left(\frac{t}{t_i}\right)^{-1} \quad (\text{A.38})$$

dove i simboli + e - denotano i modi rispettivamente crescente e decrescente. Dall'equazione (A.25a) linearizzata otteniamo

$$\hat{u}_k(t) = i \frac{\dot{\delta}_k(t)}{k} = \frac{i}{k_i t_i} \left[\frac{2}{3} \delta_+(t_i) \left(\frac{t}{t_i}\right)^{-1/3} - \delta_-(t_i) \left(\frac{t}{t_i}\right)^{-4/3} \right] \quad (\text{A.39})$$

Imponendo la soluzione al contorno al tempo iniziale ($u_i = 0$) otteniamo

$$\delta_+(t_i) = \frac{2}{3} \delta_-(t_i) = \frac{3}{5} \delta(t_i) \quad (\text{A.40})$$

Possiamo introdurre un parametro di densità della perturbazione

$$\Omega_p(t_i) = \frac{\rho(t_i)(1 + \delta(t_i))}{\rho_{cr}(t_i)} = \Omega(t_i)(1 + \delta(t_i)) \quad (\text{A.41})$$

dove il pedice p denota una quantità inerente la perturbazione. Affinchè si possa formare una struttura è necessario che la perturbazione si stacchi dal flusso di Hubble e si contragga. La perturbazione dovrà comportarsi come un Universo chiuso, ovvero

$$\Omega_p(t_i) > 1 \quad (\text{A.42})$$

da cui

$$\delta_+(t_i) = \frac{3}{5} \delta(t_i) > \frac{3}{5} \frac{1 - \Omega_p(t_i)}{\Omega_p(t_i)} \quad (\text{A.43})$$

Se in questa equazione sostituiamo la definizione di $\Omega(z)$

$$\Omega(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_{cr}(z)} = \frac{\rho(z)}{\frac{3H^2(z)}{8\pi G}} = \frac{\Omega_0(1+z)}{(1-\Omega_0) + \Omega_0(1+z)} \quad (\text{A.44})$$

dove Ω_0 è il parametro di densità oggi, abbiamo

$$\delta_+(t_i) > \frac{3}{5} \frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0(1 + z_i)} \quad (\text{A.45})$$

Otteniamo dunque le seguenti condizioni

- se $\Omega_0 = 1$ la condizione per il collasso è $\delta(t_i) > 0$
- se $\Omega_0 < 1$ la condizione per il collasso è $\delta(t_i) > \frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0(1 - z_i)}$
- se $\Omega_0 > 1$ collassa sempre

Nel primo e nell'ultimo caso le perturbazioni di densità sono destinate a collassare. Nel caso in cui il parametro di densità sia minore di 1, invece, c'è una condizione più restrittiva; la perturbazione deve avere una certa ampiezza iniziale per poter collassare. Notiamo inoltre che tale ampiezza dev'essere raggiunta in un tempo iniziale anteriore al tempo in cui l'Universo comincia a sentire la curvatura entrando quindi in una fase di espansione accelerata.

Se le condizioni sono soddisfatte, la perturbazione si espanderà come un Universo separato, raggiungerà il massimo dell'espansione e poi collasserà. Tale espansione sarà data dall'equazione di Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_i^2 \left[\Omega_p(t_i) \frac{a_i}{a} + (1 - \Omega_p(t_i)) \right] \quad (\text{A.46})$$

Sia t_m l'epoca della massima espansione. Sarà dunque $\dot{a}(t_m) = 0$, che inserita nella precedente equazione ci dà

$$\rho_p(t_m) = \rho_p(t_i) \left(\frac{a_i}{a(t_m)} \right)^3 = \rho_{cr}(t_i) \Omega_p(t_i) \left[\frac{\Omega_p(t_i) - 1}{\Omega_p(t_i)} \right]^3 \quad (\text{A.47})$$

Si può dimostrare che per un Universo chiuso sussiste la seguente relazione:

$$t_m = \left(\frac{3\pi}{32G\rho_p(t_m)} \right)^{1/2} \quad (\text{A.48})$$

Per quanto riguarda il background, esso evolverà secondo il suo modello Einstein - de Sitter per cui valgono le seguenti:

$$H(t) = \frac{2}{3t} \quad (\text{A.49})$$

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad (\text{A.50})$$

Da (A.50) calcolata in t_m e da (A.47) e (A.48) otteniamo

$$\delta(t_m) = \frac{\rho_p(t_m)}{\rho(t_m)} - 1 = 4.6 \quad (\text{A.51})$$

Essendo t_m l'epoca di maggior espansione allora è anche l'epoca in cui la perturbazione si stacca dal flusso di Hubble. Da questo momento il background continua ad espandersi mentre la perturbazione collassa. Il suo destino sembrerebbe essere il collasso in una singolarità. Tuttavia quando siamo in regime fortemente non lineare dobbiamo considerare altri fenomeni che intervengono e diventano importanti. Infatti ad alte densità vi saranno piccole anisotropie che generano gradienti di pressione e shock. L'energia gravitazionale viene convertita in energia termica che scalda il gas. Se avessi una perturbazione di DM, invece della pressione, che non è presente in quanto la materia oscura è non collisionale, avremmo che comunque il sistema sarebbe supportato dalla dispersione di velocità, come descritto nel paragrafo 3.2. Qualunque sia la componente, il sistema raggiunge quindi una situazione di equilibrio, con una configurazione che avrà una certa dimensione R_{vir} e massa M . Dal teorema del viriale (paragrafo 3.4) abbiamo

$$E_{vir} = \frac{U}{2} = -\frac{1}{2} \frac{GM^2}{R_{vir}} \quad (\text{A.52})$$

dove U è l'energia potenziale del sistema. Se ora pensiamo che tale sistema non perda massa a causa degli shock, e non perda energia per radiazione, avremo che l'energia e la massa che la perturbazione aveva al tempo t_m è uguale a quella che possiede ora a t_{vir} , da cui, essendo

$$E_m = -\frac{1}{2} \frac{GM^2}{R_m} \quad (\text{A.53})$$

otteniamo

$$R_{vir} = \frac{R_m}{2} \quad (\text{A.54})$$

Alla virializzazione il sistema avrà una dimensione pari alla metà di quella che possedeva all'epoca della massima espansione. Di conseguenza la densità sarà

$$\rho_p(t_{vir}) = 2^3 \rho_p(t_m) \quad (\text{A.55})$$

Da cui possiamo ricavare il contrasto di densità alla virializzazione

$$\delta(t_{vir}) = \frac{\rho_p(t_{vir})}{\rho(t_{vir})} = \frac{2^3 \rho_p(t_m)}{\rho(t_m) \left(\frac{t_{vir}}{t_m}\right)^{-2}} \simeq 178 \quad (\text{A.56})$$

Per la seconda eguaglianza abbiamo usato l'andamento della densità del background $\rho \sim a^{-3} \sim t^{-2}$, infatti durante la contrazione della perturbazione l'Universo di background ha continuato ad espandersi. Il valore di $t_{vir}/t_m \simeq 2$ lo si ricava facilmente dalle relazioni precedenti, mentre il rapporto tra la densità della perturbazione e quella del background al tempo t_m è dato dalla (A.51).

Come vedremo nei prossimi capitoli, si è soliti normalizzare le quantità utilizzate con la rispettiva quantità calcolata ad R_{200} , dove quest'ultima quantità è il raggio che racchiude una sovradensità di 200 volte la densità critica, che è circa uguale a quella media dell'Universo ($\Omega_0 \simeq 1$). R_{200} ci dà dunque una stima della distanza tipica entro cui il sistema è virializzato.

Notiamo che se avessimo usato la teoria lineare avremmo trovato il seguente risultato

$$\delta(t_{vir}) = \delta(t_m) \left(\frac{t_{vir}}{t_m} \right)^{2/3} = 1.69 \quad (\text{A.57})$$

dove $\delta(t_m)$ è estrapolato secondo teoria lineare e vale circa 1. Risulta quindi evidente che non appena il contrasto di densità è dell'ordine dell'unità, la teoria lineare è inapplicabile. Il caso visto in questo paragrafo è chiaramente molto idealizzato, come sottolineato sopra, e per casi più generali bisogna ricorrere a metodi numerici. Le simulazioni utilizzate in questo lavoro di tesi permettono infatti di studiare strutture come gli ammassi di galassie fortemente non lineari, e con geometrie che non possiedono simmetrie elevate come nel caso appena visto.

A.6 | L'approssimazione di Zel'Dovich

Lo studio delle perturbazioni non lineari che faremo in questa sezione porta ad una teoria che funziona bene in uno scenario di Hot Dark Matter. Sebbene il modello al momento più accreditato sia il Λ CDM, l'approssimazione sviluppata da Zel'Dovich trova ancora applicazioni molto importanti. In questo stesso lavoro di tesi l'approssimazione è stata citata nel Paragrafo 2.4 dove si era usata per spostare le particelle al fine di generare le corrette condizioni iniziali in una simulazione cosmologica.

Nella trattazione lineare delle perturbazioni avevamo usato un approccio euleriano, ovvero abbiamo studiato il campo $\delta(\vec{x}, t)$. Il metodo qui illustrato adotta invece uno schema lagrangiano, dove gli elementi di fluido sono seguiti lungo la loro traiettoria.

Riferendoci alla Figura A.2 sia d^3q il volume iniziale dell'elemento di fluido e \vec{q} la sua coordinata lagrangiana, che coincide con la coordinata euleriana. Questo elemento di fluido ha

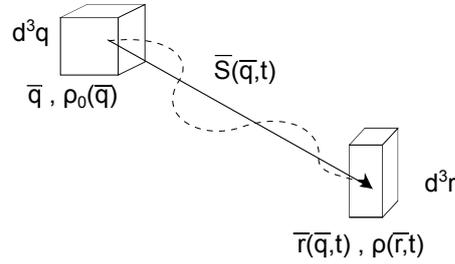


Figura A.2: Schema lagrangiano dell'approssimazione di Zel'Dovich.

una densità $\rho_0(\vec{q})$, e si muove lungo la traiettoria (linea tratteggiata in figura) fino ad \vec{r} , deformandosi. Avrà quindi un nuovo volume d^3r ed una nuova densità $\rho(\vec{r}, t)$. In assenza di perturbazioni avrei $\vec{r}(t) = a(t) \cdot \vec{x}$, con \vec{x} coordinata comovente. A causa delle perturbazioni dovrò invece scrivere:

$$\vec{r}(\vec{q}, t) = a(t) \cdot \vec{x}(\vec{q}, t) = a(t)[\vec{q} + \vec{S}(\vec{q}, t)] \quad (\text{A.58})$$

Questa espressione ci restituisce la posizione propria \vec{r} dell'elemento di fluido che aveva inizialmente posizione comovente \vec{q} . Sebbene il volume si deformi, la sua massa si conserva, pertanto avremo

$$\rho_0 d^3q = \rho(\vec{r}, t) d^3r \quad (\text{A.59})$$

da cui

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{\rho_0 / a^3}{\det \left(\delta_{ij} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial q_i} \right)} \quad (\text{A.60})$$

Fino a questo punto il conto è esatto. Ora introduciamo l'*ansatz* di Zel'Dovich: al primo ordine, cioè per spostamenti piccoli, il vettore spostamento \vec{S} è fattorizzabile in un termine che dipende solo dal tempo ed uno che dipende solo da \vec{q} .

$$\vec{S}(\vec{q}, t) = g(t) \cdot \vec{p}(\vec{q}) \quad (\text{A.61})$$

Vediamo ora di comprendere meglio il significato di g e p . Sostituiamo in (A.60) l'equazione appena trovata

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{\rho_b}{\det\left(\delta_{ij} + g(t)\frac{\partial p_i}{\partial q_j}\right)} \quad (\text{A.62})$$

dove $\rho_b = \rho/a^3$ è la densità del background. Imponiamo ora che l'evoluzione della densità che si ottiene dalla teoria lagrangiana sia uguale a quella ottenuta con la teoria euleriana (equazione (A.28)).

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\rho_b} - 1 \simeq \left[1 - g(t)\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\right] - 1 = -g(t)\vec{\nabla}_q \vec{p} \quad (\text{A.63})$$

mentre in teoria euleriana abbiamo:

$$\delta(\vec{x}, t) = D(t)\delta_i(\vec{x}) = D(t)\sum_{\vec{k}} \hat{\delta}_{\vec{k},i} \exp[i\vec{k} \cdot (\vec{q} + g(t_i)\vec{p}(\vec{q}))] = D(t)\sum_{\vec{k}} \hat{\delta}_{\vec{k},i} \exp[i\vec{k} \cdot \vec{q}] \quad (\text{A.64})$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo scelto come istante iniziale t_i quello che corrisponde a spostamento nullo, per cui $\vec{x} = \vec{q}$. Imponendo l'uguaglianza di (A.63) e (A.64) otteniamo

$$-g(t)\vec{\nabla}_q \vec{p} = D(t)\sum_{\vec{k}} \hat{\delta}_{\vec{k},i} \exp[i\vec{k} \cdot \vec{q}] = D(t)\delta(\vec{q}) \quad (\text{A.65})$$

Avremo quindi

$$\begin{cases} g(t) \propto D(t) \\ \vec{\nabla}_q \vec{p} \propto \delta(\vec{q}) \end{cases} \quad (\text{A.66})$$

da cui

$$\vec{p}(\vec{q}) = \frac{D(t)}{g(t)} \sum_{\vec{k}} \frac{i\vec{k}}{k^2} \hat{\delta}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{q}} \equiv -\vec{\nabla} \Phi_0 \quad (\text{A.67})$$

e si può dimostrare che Φ_0 è proporzionale al potenziale gravitazionale della teoria lineare. Arriviamo dunque alla relazione di Zel'Dovich sostituendo quest'ultima espressione in (A.63)

$$\delta(\vec{x}, t) = D(t)\nabla^2 \Phi_0(\vec{q}) \quad (\text{A.68})$$

Ricordiamo che \vec{q} e \vec{x} sono collegati dalla mappa di Zel'Dovich

$$\vec{x} = \vec{q} + g(t)\vec{p}(\vec{q}) \quad (\text{A.69})$$

ovvero

$$\vec{x}(\vec{q}, t) = \vec{q} - D(t)\vec{\nabla}\phi_0 \quad (\text{A.70})$$

Per capire il significato di questa relazione calcoliamo la velocità:

$$\vec{v}(t) = a(t)\dot{\vec{x}} = -a(t)\dot{D}(t)\vec{\nabla}\Phi_0 \quad (\text{A.71})$$

e calcoliamola ad un istante t_0 :

$$\vec{v}_0 = a(t_0)\dot{D}(t_0)\vec{\nabla}\Phi_0 \quad (\text{A.72})$$

che sostituita in (A.70) dà

$$\vec{x}(\vec{q}, t) = \vec{q} + D(t)\frac{\vec{v}_0}{a(t_0)\dot{D}(t_0)} = \vec{q} + c\vec{o}st \cdot D(t) \quad (\text{A.73})$$

che ricorda l'equazione del moto rettilineo $\vec{x} = \vec{q} + \vec{v}_0 \cdot t$. L'approssimazione di Zel'Dovich consiste nell'imprimere ad un elemento di fluido un'accelerazione iniziale proporzionale al gradiente del potenziale nel punto. Tale punto si muoverà di moto rettilineo uniforme con variabile temporale $D(t)$, invece di t , poichè siamo in un background in espansione. Questa descrizione "visiva" mostra anche i limiti di questa approssimazione, che vale solo per piccoli spostamenti. Gli elementi di fluido sentono la gravità solo all'inizio (l'accelerazione è proporzionale a Φ_0 e non a $\Phi(t)$). Pertanto due elementi che si incontrano si attraversano. Questo attraversamento è chiamato *shell crossing*. Quando ciò avviene la mappa di Zel'Dovich (A.69) non è più univoca, e l'approssimazione vista in questo paragrafo non è più applicabile.

La teoria sviluppata da Zel'Dovich ci permette di fare ulteriori importanti considerazioni sul campo di densità, che ci permettono di capire la struttura a grande scala dell'Universo. Con l'equazione (A.60) abbiamo visto che l'evoluzione del campo di densità è determinata da $\partial p_i / \partial q_j$. Tale matrice è reale e simmetrica in quanto $\vec{p}(\vec{q})$ è il gradiente di una quantità scalare. È sempre possibile dunque mettersi in un sistema di riferimento in cui tale matrice sia diagonale. Se così facciamo, chiamiamo $-\lambda_1(\vec{q}), -\lambda_2(\vec{q}), -\lambda_3(\vec{q})$ i tre autovalori, tali che $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{\rho_b(t)}{[1 - D(t)\lambda_1(\vec{q})] \cdot [1 - D(t)\lambda_2(\vec{q})] \cdot [1 - D(t)\lambda_3(\vec{q})]} \quad (\text{A.74})$$

Consideriamo un istante iniziale in cui $D(t)\lambda_i \ll 1 \quad \forall i$. Col passare del tempo $D(t)$ cresce, fino ad arrivare ad un tempo t per cui $D(t) = \lambda_1^{-1}$. In questo momento il campo di densità diverge, e il collasso avviene in una sola direzione, quella dell'autovettore corrispondente all'autovalore λ_1 . Queste strutture a foglio si chiamano **pancakes**, e sono le prime strutture non lineari a formarsi a causa delle instabilità gravitazionali che amplificano le perturbazioni del campo di densità.

Se gli autovalori sono tali per cui $\lambda_1 = \lambda_2$ il collasso avviene lungo due direzioni perpendicolari, e si crea un **filamento**. Infine se tutti 3 gli autovalori sono uguali il collasso avviene in 3 direzioni e ho la formazione di un **nodo**.

Quando abbiamo il collasso si formano delle zone chiamate *caustiche* in cui la densità diverge. Tuttavia, come abbiamo visto sopra, questo modello è affetto da shell crossing, cosicchè le particelle si attraversano invece di rimanere vicine formando strutture ad alta densità. Il risultato è che la teoria di Zel'Dovich riesce a riprodurre bene la struttura a grandi lunghezze d'onda, ma non riesce a cogliere i fenomeni ad alta frequenza. Per questo motivo non funziona bene in uno scenario CDM, dove le prime strutture che si formano sono quelle piccole, privilegiando quindi i modi ad alta frequenza. Si possono apportare correzioni a questa approssimazione, come la *approssimazione di Zel'Dovich troncata*, che toglie i modi ad alta frequenza dal campo di densità (ovvero tolgo i modi che mi darebbero non linearità) evitando quindi lo shell crossing. Il risultato è una più accurata localizzazione dei siti di formazione delle strutture, ma si perde completamente la descrizione della configurazione interna delle strutture che si formano, in quanto la struttura interna dipende fortemente dalla dinamica non lineare.

L'approssimazione di Zel'Dovich rimane comunque molto utile se non pretendiamo di voler riprodurre il dettaglio delle strutture. In particolare per piccoli spostamenti in zone a bassa densità fornisce una descrizione semplice ed accurata. É questo il motivo per cui viene impiegata per imprimere il primo spostamento delle particelle in una simulazione al fine di generare le condizioni iniziali, come abbiamo visto nel paragrafo ??.

Media biweight

Per estrarre informazioni da grandi quantità di dati sono necessari metodi statistici. Non sempre però l'applicazione dei metodi più classici porta buoni risultati. In questo lavoro di tesi stimatori come la media sono risultati infatti totalmente inefficaci a caratterizzare un campione. Un estimatore per essere considerato un buon metodo per ottenere informazione deve soddisfare dei requisiti di *resistenza*, *robustezza* ed *efficienza*. Vediamo brevemente cosa intendiamo con questi tre concetti:

Resistenza implica l'insensibilità a distribuzioni localizzate anomale nei dati. Un estimatore resistente, come ad esempio la *mediana*, cambia poco se una piccola parte dei dati è sostituita da altri dati. Al contrario la *media* non è resistente. Sostanzialmente, metodi resistenti dipendono dalla parte principale della distribuzione, dando poca importanza alle code della stessa.

Robustezza implica l'insensibilità alla forma specifica della distribuzione dei dati. Ad esempio metodi che raffrontano la distribuzione osservata con una gaussiana sono non robusti, in quanto se la distribuzione reale non è gaussiana tali metodi restituiscono stime non buone (ovvero presentano una grande varianza).

Efficienza si riferisce alla qualità dell'informazione che si riesce a ricavare. Nelle analisi con pochi dati l'efficienza di un estimatore è fondamentale. Un metodo efficiente estrarrà una certa informazione dai dati in possesso, mentre un metodo non efficiente avrebbe bisogno di un numero molto maggiore di dati per ottenere una stima altrettanto buona.

Oltre ai metodi classici, come media pesata e mediana, per questo lavoro di tesi ho usato la media *biweight*. Tale estimatore risulta comodo (Beers, Flynn e Gebhardt (1990)) quando siamo in presenza di distribuzione lontane dalla gaussianità ed in particolare con valori molto lontani dalla parte principale della distribuzione.

La definizione della media biweight è la seguente

$$C_B = M + \frac{\sum_{|u_i| < 1} (x_i - M)(1 - u_i^2)^2}{\sum_{|u_i| < 1} (1 - u_i^2)^2} \quad (\text{B.1})$$

con

$$u_i = \frac{x_i - M}{c \cdot MAD} \quad (\text{B.2})$$

$$MAD = \text{median}(|x_i - M|) \quad (\text{B.3})$$

dove M è la mediana, x_i sono i valori del campione e c un parametro. Questo estimatore è una correzione alla mediana: vediamo infatti che è uguale ad M più un termine correttivo. Quest'ultimo termine è una media pesata della distanza tra i valori x_i e il valore della mediana. u_i è il valore della distanza di un dato dalla mediana, normalizzato per la mediana della distanza dei punti da M . Il miglior valore per c risulta essere 6 (vedi Beers, Flynn e Gebhardt (1990)). La somma viene eseguita solo sui valori per i quali $|u_i| < 1$, ovvero per quei valori non troppo distanti dalla mediana. In tal modo eventuali valori che si allontanano tanto dalla parte centrale della distribuzione non vengono considerati. Inoltre notiamo che i pesi sono maggiori quando u_i è piccolo, ovvero per i punti vicini ad M . I pesi sono cioè a loro volta pesati (da cui la definizione *bi-weight*).

L'estimatore qui descritto è la media *biweight one-step*. Un ulteriore miglioramento lo si può ottenere se dopo aver calcolato C_B , rifacciamo il conto dove al posto di M mettiamo il valore C_B appena ottenuto. L'operazione può essere iterata più volte. La convergenza è molto rapida, e bastano poche iterazioni.

Il metodo risulta essere efficiente, robusto e resistente, ed è stato applicato in questo lavoro di tesi quando le distribuzioni erano affette da accentuate non gaussianità. Sebbene i campioni di dati fossero in genere molto grandi, era possibile avere valori molto distanti dalla zona principale della distribuzione. la motivazione è di origine fisica. Pensiamo di voler calcolare ad esempio σ_r / σ_t in una shell. Sebbene il comportamento delle particelle in quella regione sia mediamente simile e dovuto ai particolari processi dinamici che avvengono in quella zona, è possibile avere delle particelle che hanno subito delle forti deviazioni dall'andamento medio dovute ad interazioni locali. Il valore restituito da tali particelle non

è però di alcuna importanza per l'analisi della dinamica globale, e pertanto il loro utilizzo avrebbe come unico risultato quello di creare rumore nella statistica. La media biweight è quindi uno strumento molto buono per trattare situazioni di questo tipo.

Bibliografia

- Beers, T.C., K. Flynn e K. Gebhardt. "Measures of location and scale for velocities in clusters of galaxies - A robust approach". In: *aj* 100 (1990), pp. 32–46. DOI: 10.1086/115487.
- Binney, J. e S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 1987.
- Biviano, A. "Galaxy systems in the optical and infrared". In: *ArXiv e-prints* (2008). eprint: 0811.3535.
- Biviano, A. e M. Girardi. "The mass profile of galaxy clusters out to $2r_{200}$ ". In: *ApJ* (2003).
- Biviano, A. e P. Katgert. "The ESO Nearby Abell Cluster Survey". In: *A&A* 424.3 (2004), pp. 779–791.
- Biviano, A. e B. M. Poggianti. "The orbital velocity anisotropy of cluster galaxies: evolution". In: *A&A* 501.2 (2009), pp. 419–427.
- Biviano, A. et al. "On the efficiency and reliability of cluster mass estimates based on member galaxies". In: *A&A* 456 (2006), pp. 23–36. DOI: 10.1051/0004-6361:20064918. eprint: arXiv:astro-ph/0605151.
- Biviano, A. et al. "Velocity segregation in galaxy clusters". In: *ApJ* (1992).
- "Velocity segregation in galaxy clusters". In: *ApJ* 396 (1992), pp. 35–44.
- Borgani, S. "Cosmology with clusters of galaxies". In: *ArXiv e-prints* (2006). eprint: astro-ph/0605575v1. URL: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0605575v1>.
- Borgani, S. e A. Kravtsov. "Cosmological simulations of galaxy clusters". In: *ArXiv e-prints* (2009). eprint: 0906.4370v1. URL: <http://arxiv.org/abs/0906.4370v1>.
- Cavaliere, A. e R. Fusco-Fermiano. "X-rays from hot plasma in clusters of galaxies". In: *A&A* (1976).
- Cole, S. et al. "The 2dF Galaxy Redshift Survey: power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications". In: *MNRAS* (2005).
- Coles, P. e F. Lucchin. *Cosmology - The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. Wiley, 2002.

- Diaferio, A., M. J. Geller e K. J. Rines. "Caustic and weak-lensing estimators of galaxy cluster masses". In: *ApJ* (2005).
- Diaferio, A. et al. "The spatial and kinematic distributions of cluster galaxies in a LCDM universe: comparison with observations". In: *MNRAS* 323 (2001), pp. 999–1015.
- Diemand, J., B. Moore e J. Stadel. "Velocity and spatial biases in cold dark matter subhalo distributions". In: *MNRAS* 352 (2004), pp. 535–546.
- Dolag, K. et al. "Substructures in hydrodynamical cluster simulations". In: *MNRAS* 399 (2009), pp. 497–514. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2009.15034.x. eprint: 0808.3401.
- Dressler, A. "Galaxy morphology in rich clusters - Implications for the formation and evolution of galaxies". In: *ApJ* (1980).
- Gao, L. et al. "Galaxies and subhaloes in Λ CDM galaxy clusters". In: *MNRAS* 352 (2004), pp. L1–L5.
- Gao, L. et al. "The subhalo populations of LCDM dark haloes". In: *MNRAS* (2008).
- Ghigna, S. et al. "Dark matter haloes within clusters". In: *MNRAS* 300 (1998), pp. 164–162.
- Gill, S. P. D. et al. "The evolution of substructure – II. Linking dynamics to environment". In: *MNRAS* 351.2 (2004), pp. 410–422.
- Girardi, M. et al. "Optical mass estimates of galaxy clusters". In: *ApJ* (1998).
- Gunn, J. E. e J. R. Gott. "On the infall of matter into clusters of galaxies and some effects on their evolution". In: *ApJ* 176.1 (1972), pp. 1–19.
- Katgert, P., A. Biviano e A. Mazure. "The ESO nearby abell cluster survey. XII. The mass and mass-to-light ratio profiles of rich clusters". In: *ApJ* (2004).
- Klypin, A. et al. "Where are the missing galactic satellites?" In: *ApJ* 522 (1999), pp. 82–92.
- Lapi, A. e A. Cavaliere. "Dark matter equilibria in galaxies and galaxy systems". In: *ApJ* 692.1 (2009), p. 174.
- Loreti, M. *Teoria degli Errori e Fondamenti di Statistica*. A free book distributed under the GNU GPL. Available at <http://wwwcdf.pd.infn.it/labo/INDEX.html>, 2006.
- Lynden-Bell, D. "Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems". In: *MNRAS* (1967).
- McCarthy, I. G. et al. "Ram pressure stripping the hot gaseous haloes of galaxies in groups and clusters". In: *MNRAS* 383.2 (2008), pp. 593–605.
- Merritt, D. "Henry Kandrup's Ideas About Relaxation of Stellar Systems". In: *Annals of the New York Academy of Sciences* 1045 (2005), pp. 3–+. DOI: 10.1196/annals.1350.002. eprint: arXiv:astro-ph/0502169.

- Moore, B. et al. "Galaxy harassment and the evolution of clusters of galaxies". In: *Nature* 379 (1996), pp. 613–616.
- Moran, S. M. et al. "A wide-field survey of two $z = 0.5$ galaxy clusters: identifying the physical processes responsible for the observed transformation of spirals into S0s". In: *ApJ* 671 (2007), pp. 1503–1522.
- Nagai, D. e A.V. Kravtsov. "The Radial Distribution of Galaxies in Λ Cold Dark Matter Clusters". In: *ApJ* 618 (2005), pp. 557–568. DOI: 10.1086/426016. eprint: arXiv:astro-ph/0408273.
- Navarro, J. F., C. S. Frenk e S. D. M. White. "The structure of cold dark matter halos". In: *ApJ* (1996).
- Popesso, P. et al. "RASS-SDSS Galaxy cluster survey. IV. A ubiquitous dwarf galaxy population in clusters". In: *A&A* (2006).
- Rasia, E., G. Tormen e L. Moscardini. "A dynamical model for the distribution of dark matter and gas in galaxy clusters". In: *MNRAS* 351 (2004), pp. 237–252. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2004.07775.x. eprint: arXiv:astro-ph/0309405.
- Reiprich, T. H. e H. Böhringer. "The mass function of an X-ray flux-limited sample of galaxy clusters". In: *ApJ* (2002).
- Sarazin, C. L. "X-ray emission from clusters of galaxies". In: *Reviews of Modern Physics* 58.1 (1986).
- Saro, A. "Galactic Population in Galactic Population in Cosmological Hierarchical Models". Tesi di dott. Università degli Studi di Trieste, 2007/2008.
- Saro, A. et al. "Properties of the galaxy population in hydrodynamical simulations of clusters". In: *MNRAS* 373 (2006), pp. 397–410. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2006.11046.x. eprint: arXiv:astro-ph/0609191.
- Springel, V. "The cosmological simulation code GADGET-2". In: *MNRAS* 364 (2005), pp. 1105–1134.
- Springel, V., N. Yoshida e S. D. M. White. "GADGET: a code for collisionless and gasdynamical cosmological simulations". In: *New Astronomy* 6 (2001), pp. 79–117.
- Springel, V. et al. "Populating a cluster of galaxies - I. Results at $z=0$ ". In: *MNRAS* (2001).
- Springel, V. et al. "Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars". In: *Nature* 435 (2005).
- Taylor, J. E. e J. F. Navarro. "The Phase-Space Density Profiles of Cold Dark Matter Halos". In: *ApJ* 563.2 (2001), p. 483.

- Thomas, T. e P. Katgert. "The ESO nearby Abell cluster survey. VIII. Morphological and spectral classification of galaxies". In: *A&A* (2006).
- Tormen, G., L. Moscardini e N. Yoshida. "Properties of cluster satellites in hydrodynamical simulations". In: *MNRAS* 350 (2004), pp. 1397–1408. doi: 10.1111/j.1365-2966.2004.07736.x. eprint: arXiv:astro-ph/0304375.
- van der Marel, R. P. et al. "The velocity and mass distribution of clusters of galaxies from the CNOC1 cluster redshift survey". In: *aj* (2000).
- Wetzel, A.R. "On the Orbits of Infalling Satellite Halos". In: *ArXiv e-prints* (2010). eprint: 1001.4792.

Ringraziamenti

Non son mai stato bravo a fare ringraziamenti. Sarà forse la timidezza, ma ho sempre cercato di sviare il discorso quando si trattava di ringraziare. Questo non vuol dire che non sappia quanto aiuto mi è stato dato dalle diverse persone che hanno fatto parte della mia vita. Questa pagina la voglio considerare come una parentesi per nulla formale, pertanto scriverò in maniera più diretta, senza tanti formalismi. Anzi, ho appena ripetuto la parola "formale" due volte (e con questa fanno tre...). Ma bando alle ciance! O, meglio, *ciancio alle bande!* Come direbbe Ema! Da dove cominciare? Essendo la tesi direi che potrei cominciare proprio dalle persone che mi hanno dato una mano a farla...anzi diciamo che son stati proprio fondamentali. Ringrazio dunque il prof. Borgani e il dr. Biviano. Ma nel linguaggio tecnico che usiamo in dipartimento questi ringraziamenti assumono la seguente forma: Grazie mille Stefano ed Andrea! Stefano credo che si ricorderà a lungo della mia tesi, non tanto per la tesi in sè, ma per il periodaccio che ha passato in questi mesi. E nonostante tutto è sempre stato pronto a darmi una mano. E grazie alla pazienza infinita di Andrea, che veniva puntualmente sequestrato da me! Come non ricordare poi Alex! Quando mi vedeva sbiancava perchè già sapeva che l'avrei portato ai lavori forzati! Ma tutto lo stress accumulato in questo periodo avrebbe portato a catastrofici eventi se non avessi avuto una valvola di sfogo come gli amici che ho trovato in Villa! Che bello che è brontolare, e loro lo sanno bene! Marco, Agnese, Valentina, Ema...coraggio, ora è finita, non avrete più un brontolone perennemente attivo al vostro fianco! A Marco e Agnese un ringraziamento enorme per l'aiuto che mi hanno dato durante i due anni di esami. Un gran team, bisogna ammetterlo! Anche quando faceva caldo! Ma la mia avventura non è cominciata a Trieste, bensì a Padova. E allora come non ricordare la Silvietta. Le lezioni di fluidodinamica con le battute che hanno preceduto di qualche anno Big Bang Theory sono indimenticabili!

Mi concederete ora di dividere la seguente parte dal resto. Qui infatti desidero ringraziare le persone che hanno costituito le fondamenta di questo traguardo. Gli ultimi 6 anni hanno un nome: Serena. Tu ben sai tutto, il bello e il brutto. E sebbene la rima non cercassi, pensando a te farla è stata più facile di quanto pensassi. Che senza di te questi anni non sarebbero stati gli stessi, e son convinto che anche tu lo pensi. Tanti discorsi non val la pena di fare, che sai bene che con te ho imparato il significato di amare!

E se gli ultimi 6 anni hanno avuto un nome, gli ultimi 28 ne hanno avuti due: mamma e papà. Non sono nomi voi direte! Ma son due parole molto più importanti! Sono le persone che mi hanno consentito di essere qui. Questa è la parte che più di ogni altra rischia di scendere nella scena da filmetto buonista, e voi sapete che non son così! Saprete togliere tutti gli addobbi e vedere quello che è il significato di ciò che penso, capirete che la bellezza e, spesso, la verità è racchiusa nella semplicità. Per questo mi basta dirvi: GRAZIE!