



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.
CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN ASTROFISICA E FISICA DELLO
SPAZIO

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

**Ruolo della Diffusione
in Codici Lagrangiani SPH**

Candidato:
MARCO VELLISCIG

Relatore:
PROF. STEFANO BORGANI
Correlatore:
DOTT. LUCA TORNATORE

Anno Accademico 2009/10

*Ad Angela, Roberto, Leonardo ed Erminia
la mia famiglia senza la quale
non sarei niente*

Do, or do not. There is no try

Yoda speaking with me

Fare mattoni ogni giorno!

Google Translate & Agnese Fabris

Indice

Introduzione	ix
1 Concetti base di fluidodinamica	1
1.1 Gas perfetto	1
1.2 Equazioni di Eulero	3
1.2.1 Conservazione della massa	3
1.2.2 Conservazione del momento	3
1.2.3 Conservazione dell'energia	4
1.3 Equazioni di Eulero in formulazione Lagrangiana	5
1.3.1 Conservazione della massa	5
1.3.2 Conservazione del momento	6
1.3.3 Conservazione dell'energia	6
1.4 Discontinuità e Shock idrodinamici	7
1.4.1 Discontinuità e condizioni di Rankine-Hugoniot	7
1.4.2 Proprietà degli shock	9
2 Smoothed Particle Hydrodynamics	11
2.1 Formulazione teorica ed equazioni di base	11
2.1.1 Derivate dei campi in approssimazione SPH	12
2.1.2 Scelta del Kernel	13
2.1.3 Equazione del momento in formulazione SPH	14
2.1.4 Equazione dell'energia in formulazione SPH	15
2.1.5 Risoluzione adattiva	16
2.1.6 La viscosità artificiale	17
2.1.7 Forme alternative di viscosità artificiale	19
2.2 Il codice GADGET	21
2.2.1 Equazioni SPH implementate in GADGET	21
2.2.2 Viscosità artificiale in GADGET	22
2.2.3 Parallelizzazione in GADGET	23
2.2.4 Condizione di Courant e scelta del timestep di integrazione	24
2.2.5 Integrazione numerica in GADGET	26
2.3 Limiti di un approccio SPH	27
2.3.1 Tensione superficiale artificiale	28

2.3.2	Il problema del mixing	28
3	La diffusione termica in SPH	37
3.1	Implementazione di Wadsley	38
3.2	Implementazione di Price	39
3.2.1	Viscosità artificiale proposta da Price	41
3.3	Risultati	42
3.3.1	Sod shock tube	43
3.3.2	Sod: Versione tradizionale dello schema SPH	45
3.3.3	Sod: Diffusione termica di Wadsley	47
3.3.4	Sod: Diffusione termica di Price	48
3.3.5	Test multifase per instabilità di Kelvin Helmholtz	60
3.3.6	KH: Versione tradizionale dello schema SPH	61
3.3.7	KH: Diffusione termica di Wadsley	63
3.3.8	KH: Diffusione termica di Price	65
3.3.9	Blob Test	73
3.3.10	Risultati del Blob test	75
3.4	Conclusioni	80
3.4.1	Discussione dei risultati	80
3.4.2	Sviluppi futuri	80
3.4.3	Ulteriori considerazioni	81
4	La diffusione chimica in SPH	83
4.1	Equazione della diffusione	84
4.1.1	Equazione della diffusione in schema SPH	85
4.1.2	Soluzione approssimata dell'equazione della diffusione	86
4.2	Risultati	87
4.2.1	Coefficiente di diffusione costante	87
4.2.2	Condizioni iniziali	88
4.2.3	Soluzione attesa	89
4.2.4	Algoritmo di diffusione standard	90
4.2.5	Algoritmo di diffusione limitando il timestep	92
4.2.6	Condizione di Courant per la diffusione chimica	93
4.2.7	Algoritmo di diffusione con condizione di Courant	94
4.3	Conclusioni	103
	Conclusioni	105
	Ringraziamenti	115

Introduzione

In un campo come quello dell'Astrofisica dove è impossibile eseguire esperimenti direttamente, la simulazione numerica ha da sempre ricoperto il ruolo della sperimentazione. Essa è il banco di prova per teorie che sarebbe impossibile verificare direttamente. Da un lato le simulazioni degli eventi fisici ci permettono di compiere esperimenti, come viene fatto in qualunque laboratorio, e capire come variando le condizioni iniziali otteniamo diversi risultati. Dall'altro lato le simulazioni numeriche ci permettono di capire il nostro grado di conoscenza di un determinato processo fisico. Infatti, se avessimo compreso pienamente la fisica che ne regola l'evoluzione lo sapremmo anche simulare ed il suo comportamento non si discosterebbe dalla realtà. Quindi le simulazioni numeriche ci permettono sia di compiere degli esperimenti che sarebbe difficile, se non impossibile, ricreare in laboratorio, sia di verificare la nostra conoscenza del fenomeno stesso.

Negli ultimi anni l'astrofisica computazionale ha subito un notevole sviluppo ed ha guidato il progresso di molte linee di ricerca sia in astrofisica teorica che in cosmologia. Essa ricopre oggi un ruolo importante in studi che vanno dai processi di formazione di stelle e pianeti fino alla formazione di strutture cosmiche, quali galassie e ammassi di galassie. Accanto a questi studi di carattere generale, le simulazioni hanno permesso di approfondire e meglio comprendere aspetti specifici o processi astrofisici singoli come esplosioni di supernove, jet o instabilità gravitazionali/magnetorotazionali in dischi di accrescimento (ovvero strutture formate da materiale in moto orbitale attorno a un corpo centrale), tutti fenomeni che giocano un ruolo importante in molte aree dell'astrofisica.

Al fine di trarre sempre più vantaggio dall'astrofisica numerica si necessita sia di algoritmi sempre più sofisticati, sia di computer sempre più avanzati. L'avanzamento della tecnologia computazionale e lo sviluppo di super-computer paralleli sempre più veloci nella gestione dei dati e più capienti nel loro immagazzinamento ha permesso di migliorare sempre più le tecniche numeriche utilizzate, aumentandole in risoluzione, sia spaziale che temporale. Parallelamente, l'introduzione di algoritmi sempre più sofisticati e raffinati ha permesso di migliorare il grado di realismo dei risultati ottenuti e la portata delle simulazioni, oltre che di riprodurre un sempre più vasto spettro di fenomeni fisici addizionali.

L'universo come lo conosciamo è costituito da tre componenti principali: l'energia oscura che permea l'universo e che si oppone alla gravità facendo accelerare l'espansione; la materia oscura che fornisce la maggior parte della massa dell'uni-

verso ed ha un contributo fondamentale nella formazione delle strutture cosmiche ed infine la materia barionica, che rappresenta tutta la materia conosciuta (ovvero la materia costituita da atomi) e che forma tutte le strutture direttamente visibili: dalle stelle al gas diffuso. L'interazione di queste tre diverse componenti è responsabile dell'evoluzione dell'universo e della formazione delle strutture cosmiche come le conosciamo.

Idealmente lo scopo delle simulazioni cosmologiche è quello di poter ricreare l'universo attuale partendo da condizioni iniziali ricavate dall'osservazione del fondo cosmico a microonde (CMB). Il CMB è la radiazione residua emessa nel momento in cui la temperatura dell'universo è scesa fino a permettere che gli elettroni liberi si legassero ai nuclei riducendo drasticamente la sezione d'urto con la radiazione che, a quel punto, ha potuto propagarsi liberamente. Dallo spettro del CMB si può risalire alla distribuzione spaziale della materia oscura all'istante del disaccoppiamento fra materia barionica e radiazione. La distribuzione di materia oscura è fondamentale per le condizioni iniziali cosmologiche perché essa, non interagendo con radiazione e materia barionica, ha potuto formare strutture gravitazionalmente legate e massive prima della materia normale. Tali strutture massive hanno formato il nucleo di aggregazione per la materia barionica dopo il disaccoppiamento e tramite l'evoluzione hanno portato alla formazione delle strutture ora visibili. Quindi tramite osservazioni sempre più accurate del CMB si è stati in grado di ottenere la distribuzione di materia oscura al momento del disaccoppiamento, avvenuto circa trecentomila anni dopo il Big Bang. La distribuzione di materia oscura così ricavata viene usata come condizione iniziale per le attuali simulazioni cosmologiche.

La conoscenza delle condizioni iniziali cosmologiche però non è di per sé sufficiente. Infatti quando si simula l'evoluzione dell'universo si ha a che fare con un ampio spettro di eventi astrofisici che coinvolgono scale temporali, spaziali e geometrie molto diverse.

La formazione della struttura a grande scala (cosmic web) avviene su scale dell'ordine delle centinaia di Mpc e con una geometria planare o addirittura unidimensionale. Infatti la struttura a grande scala ha l'aspetto di una spugna, con gli ammassi di galassie nelle zone più dense, e dei filamenti o delle strutture planari a collegare gli ammassi fra loro. La formazione degli ammassi di galassie, invece, avviene su scale dei Mpc ed è dominata soprattutto dalla fusione di sotto-ammassi che sono solitamente strutture dalla geometria tridimensionale complessa ma, spesso, approssimabile a sferica. L'evoluzione degli ammassi è anche influenzata dalla formazione e dalla distribuzione spaziale delle galassie che li compongono. La formazione e l'evoluzione delle galassie è un processo che avviene su scale dell'ordine dei kpc e coinvolge, oltre alle fusioni di galassie, anche formazione ed evoluzione di dischi stellari e interazione fra i nuclei galattici ed il gas che li circonda. Le proprietà osservative delle galassie a loro volta sono determinate dalla formazione stellare, dalle esplosioni di supernove e dai jet dei nuclei galattici attivi. Tutti questi fenomeni avvengono su scale dell'ordine dei parsec, se non addirittura minori.

In figura 1 vengono presentati degli esempi di simulazioni astrofisiche a diverse scale. Nella prima riga vengono mostrati due ingrandimenti successivi della struttura a grande scala dell'universo. Le immagini sono tratte dalla Millennium Simulation [1], una simulazione di sola materia oscura eseguita con il codice GADGET-2 [39] usando dieci miliardi di particelle. In questa simulazione si parte con delle condizioni iniziali cosmologiche e si segue l'evoluzione delle strutture di materia oscura fino al tempo attuale. Si può vedere la struttura dell'Universo a grande scala dove gli ammassi costituiscono i nodi, collegati fra loro dai filamenti. Nella seconda riga viene mostrato un ammasso di galassie simulato con GADGET-2, usando sia materia oscura sia materia barionica. In questa simulazione si segue l'evoluzione di un ammasso di galassie usando anche la materia barionica. Nella figura a sinistra viene mostrata la mappa di temperatura per il gas. Nella figura a destra viene presentata la mappa di densità della materia oscura per lo stesso ammasso. L'ammasso è presentato al tempo attuale, si vedono i sotto-ammassi che vengono attirati dall'ammasso principale e la parte gassosa collisionale che subisce una perdita di massa interagendo con il gas dell'ammasso. Si nota che la componente gassosa è maggiormente diffusa e più calda al centro dove subisce un'attrazione gravitazionale maggiore. Il gas viene ulteriormente riscaldato da eventi di fusione che portano ad una interazione del gas presente nelle sotto-strutture con il gas nell'ammasso principale. Nella terza riga, in alto, viene mostrata la mappa di densità di gas per una galassia simulata con GADGET-2 e il modello sotto-risoluzione per la formazione stellare e il feedback MUPPI [3], mostrata di fronte e di taglio. Nella terza riga, in basso, viene mostrata la mappa di densità di stelle per la stessa galassia.

Questi processi di formazione delle strutture avvengono su tempi scala dei miliardi di anni (Gyr) e coinvolgono principalmente le interazioni fra materia oscura e materia barionica. L'evoluzione su piccola scala della materia barionica avviene in un tempo scala che è determinato dal tempo impiegato dall'onda di pressione per percorrere le scale coinvolte. Processi come l'esplosione di supernove avvengono su tempi scala molto brevi, osservativamente la luce emessa da una supernova è visibile per alcune settimane, ma influenzano la formazione stellare essenziale nell'evoluzione delle galassie e quindi hanno conseguenze su scale galattiche. Inoltre dato che quello che noi vediamo direttamente è la luce emessa da tutte le strutture astrofisiche, dobbiamo tenere conto dei processi di trasporto radiativo. Questi ultimi avvengono su tempi scala dell'ordine delle distanze coinvolte diviso la velocità della luce.

Quindi, idealmente, una simulazione cosmologica dovrebbe coprire un vastissimo intervallo di dimensioni spaziali e temporali. Questo è in pratica impossibile. Quello che si cerca piuttosto di fare è di simulare con tecniche diverse differenti scale fisiche e temporali, cercando di modellizzare in modo efficace gli effetti di tutti quei fenomeni che sono rilevanti per tali scale, senza però simularli direttamente. Per esempio la presenza di un buco nero al centro di una galassia ha degli effetti sulla sua evoluzione. Tuttavia processi che coinvolgono il buco nero avvengono su scale molto minori delle scale normalmente risolte dalle simulazio-

ni cosmologiche. Quindi non si potrà simulare direttamente l'accrescimento di materia nel buco nero e la conseguente emissione di radiazione, ma solo l'effetto macroscopico che questo evento microscopico (per la scala della simulazione) ha sulle scale risolte.

La componente di materia oscura dell'universo interagisce, con le altre componenti e con se stessa, soltanto gravitazionalmente. Tale componente quindi può essere trattata come fluido non collisionale. Per trattare numericamente un fluido non collisionale lo si approssima con una distribuzione discreta di particelle e, tramite algoritmi ad N-corpi, si calcolano le interazioni gravitazionali fra le particelle di materia oscura così ottenute. Le simulazioni dell'evoluzione di strutture formate da materia oscura, che sono quelle gravitazionalmente dominanti, hanno raggiunto un elevato grado di accuratezza. Infatti, la precisione con cui vengono simulate le strutture di materia oscura dipende solo dalla risoluzione in massa che si può raggiungere. Tale risoluzione dipende dal numero massimo di particelle simulabili e quindi cresce con la potenza di calcolo a nostra disposizione.

La componente barionica è invece collisionale e, quindi, descrivibile usando la fluidodinamica classica. Per simulare il fluido di barioni si possono usare due approcci differenti, ognuno con i propri pregi e difetti. Simulando l'evoluzione del fluido collisionale attraverso una griglia fissata, schema Euleriano, si ha una risoluzione spaziale fissa. Usando una risoluzione spaziale fissata non si possono spesso risolvere con la necessaria accuratezza le zone molto dense dove avvengono i processi astrofisicamente importanti. Usando invece uno schema Lagrangiano, si discretizza il fluido continuo ottenendo delle particelle che poi vengono seguite durante la loro evoluzione. Fissando la massa di tali particelle discretizzate si ottiene una risoluzione in massa invece che spaziale. In tal modo è possibile avere automaticamente una risoluzione spaziale maggiore nelle zone più dense.

In un approccio Lagrangiano però le particelle non corrispondono ai costituenti fondamentali del fluido, ovvero atomi o molecole, anzi, rappresentano generalmente porzioni di fluido con massa pari a vari ordini di grandezza la massa del nostro sole. Stesso discorso vale per un approccio Euleriano dove la spaziatura della griglia non corrisponde alle scale molecolari, ma a scale di distanza assai più vaste. Questo comporta che esistano dei processi fisici, importanti per l'evoluzione dei processi simulati, che avvengono su scale molto minori della risoluzione della simulazione. Per esempio la viscosità fisica agisce su scale molecolari non risolte dalla simulazione. Questo non toglie che le scale maggiori debbano risentire di ciò che avviene a scale minori. Per esempio direttamente legato alla viscosità è l'instaurarsi della turbolenza, effetto che coinvolge sia le scale risolte che quelle non risolte. L'instaurarsi della turbolenza produce un mescolamento del fluido e una diffusione di entropia che, se avviene a scale non risolte, va trattata come qualsiasi processo sotto-risoluzione.

Lo schema Euleriano e quello Lagrangiano, seppur diversi, dovrebbero produrre gli stessi risultati quando applicati ad uno stesso problema astrofisico, cosa che purtroppo non avviene. In letteratura sono presenti diversi lavori che sottolineano come questi due schemi producano risultati discordi, anche avendo cura

di imporre una risoluzione che sia confrontabile fra i due metodi [37, 6]. Le differenze appaiono sostanziali sia simulando eventi astrofisici, che simulando dei problemi idrodinamici standard, usando solo la componente barionica.

Nel tempo si è cercato di individuare le cause di questo diverso comportamento fra i due metodi. Il risultato di un'analisi approfondita ha portato a concludere che, se per i metodi Euleriani i maggiori problemi sono la mancanza di invarianza galileiana e la diffusione numerica, per i codici Lagrangiani il problema maggiore è la trattazione delle discontinuità idrodinamiche.

Nei codici Lagrangiani, come effetto di un'inaccurata trattazione delle discontinuità, la formazione di instabilità idrodinamiche di Kelvin-Helmholtz è fortemente soppressa. L'instabilità di Kelvin Helmholtz si crea quando una differenza di velocità tangenziale è presente nell'interfaccia fra due fluidi diversi. In questa configurazione qualsiasi perturbazione nel campo di velocità perpendicolare all'interfaccia, genera un'instabilità idrodinamica che ha come effetto il mescolamento fra i fluidi. Il non instaurarsi dell'instabilità impedisce al fluido di mescolarsi correttamente e quindi di diffondere, come conseguenza, l'energia termica e il momento.

Nella prima parte di questo lavoro di tesi andremo ad analizzare proprio come alcune modifiche proposte allo schema Lagrangiano standard migliorino la descrizione delle instabilità idrodinamiche. Le modifiche analizzate ed implementate nel codice riguardano l'aggiunta di una diffusione termica dovuta all'instaurarsi delle instabilità idrodinamiche. Tale approccio tenta di risolvere il problema partendo dal suo effetto. La mancata formazione di instabilità non provoca le turbolenze e quindi l'energia non si diffonde. Tale diffusione verrà invece forzata aggiungendo un termine alla diffusione dell'energia.

Nella seconda parte della tesi ci occuperemo di un altro problema dei codici Lagrangiani: l'assenza di diffusione degli elementi chimici prodotti nei processi astrofisici. La composizione chimica della componente barionica, ossia quali e quanti elementi sono presenti nel gas, non rimane immutata nel tempo. La composizione primordiale del gas è determinata dalla nucleosintesi avvenuta durante il Big Bang, ma durante l'evoluzione dell'universo vari fenomeni astrofisici modificano la quantità e il tipo di elementi presenti nel gas. Le principali responsabili della produzione di elementi sono le stelle, che tramite processi di fusione creano nuovi elementi che poi vengono ridistribuiti nel mezzo interstellare tramite venti stellari, nebulose planetarie o con la morte esplosiva della stella, la supernova.

Non solo la produzione di elementi è importante, ma anche la loro successiva diffusione del mezzo interstellare. Infatti l'abbondanza di metalli presente nel mezzo interstellare è particolarmente importante perché determina la velocità con cui esso si raffredda. In quanto un gas più ricco di metalli tende a raffreddarsi prima, dato che gli elementi più pesanti dell'idrogeno possono perdere energia termica per emissione di radiazione elettromagnetica più facilmente, avendo più stati energetici accessibili. La temperatura del gas, a sua volta, è importante perché influenza la formazione stellare, in quanto le stelle si formano in presenza di gas freddo e denso. Inoltre le stelle hanno una metallicità che è approssimativa-

mente la stessa del gas dal quale si formano, quindi è importante nelle simulazioni stimare la corretta abbondanza dei diversi elementi nel gas.

Allo stato attuale la maggior parte dei codici cosmologici si occupano della formazione di metalli, ma non tutti ne seguono la diffusione. In particolare nei codici Lagrangiani SPH questi metalli rimangono nella particella dove sono stati creati, senza mescolarsi o diffondersi nel mezzo esterno.

Nella seconda parte della tesi analizzeremo la mancanza di diffusione chimica nei codici Lagrangiani, implementando un semplice schema numerico per la diffusione dei metalli.

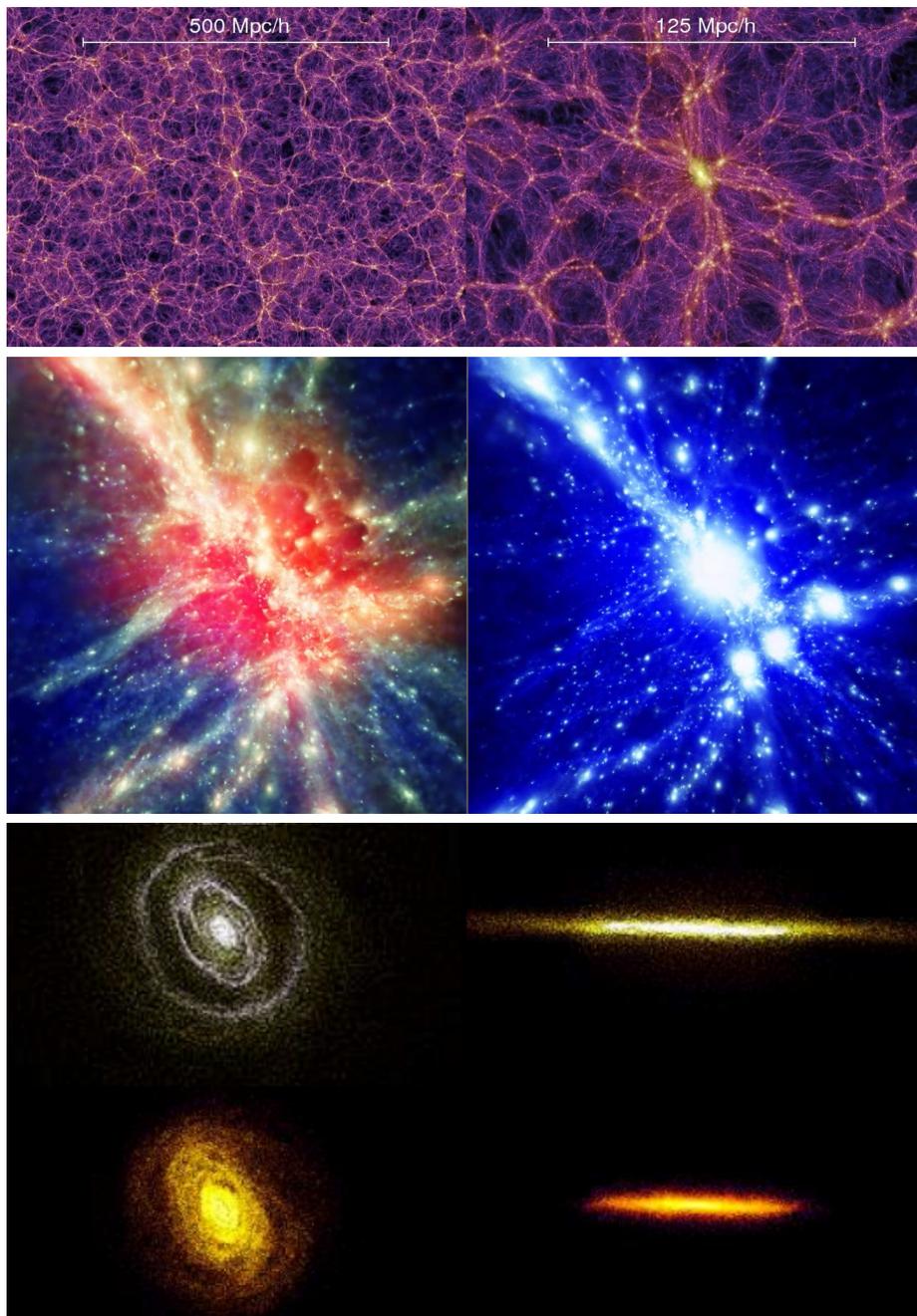


Figura 1: Nella prima riga vengono mostrati due ingrandimenti della struttura a grande scala dell'Universo di una simulazione di sola materia oscura. La simulazione da cui sono state tratte queste figure è la Millenium simulation [1], e il codice usato per realizzare la simulazione è GADGET-2 [39]. Nella seconda riga viene mostrato un ammasso di galassie simulato con GADGET-2 usando sia materia oscura sia materia barionica. A sinistra la mappa di temperatura per il gas, a destra la mappa di densità della materia oscura. Figure realizzate da Klaus Dolag con software Splotch [2]. L'ammasso rappresenta una sezione di universo di circa $10 Mpc$. Nella terza riga, in alto, viene mostrata la mappa di densità di gas per una galassia simulata con GADGET-2 e MUPPI [3], mostrata di fronte e di taglio. Nella terza riga, in basso, viene mostrata la mappa di densità di stelle per la stessa galassia. La galassia è stata simulata in una box di $35 kpc$ per lato.

Struttura della tesi

Presentiamo di seguito un breve riassunto del contenuto di ogni capitolo.

Capitolo 1: Concetti base di fluidodinamica

Nel primo capitolo daremo i concetti base della teoria della fluidodinamica. Discuteremo come poter trattare l'evoluzione di un gas sia da un punto di vista Euleriano che da un punto di vista Lagrangiano. Inoltre tratteremo il concetto di discontinuità e di shock idrodinamico.

Capitolo 2: Smoothed Particle Hydrodynamics

In questo capitolo discuteremo la traduzione numerica di uno schema idrodinamico Lagrangiano: il metodo numerico SPH. Discuteremo diffusamente le limitazioni e i vantaggi di questo metodo e le modifiche proposte in letteratura per ovviare a tali limitazioni. Inoltre tratteremo una particolare rappresentazione del metodo SPH: il codice per le simulazioni numeriche cosmologiche GADGET [39]¹, usato in questo lavoro di tesi.

Capitolo 3: La diffusione termica in SPH

In questo capitolo verranno presentate in dettaglio due modifiche proposte allo schema SPH per migliorare la trattazione delle discontinuità idrodinamiche, basate sulla diffusione termica dovuta all'instaurarsi delle instabilità. Tali modifiche verranno sia presentate da un punto di vista teorico, sottolineando le motivazioni fisiche che hanno portato alla loro formulazione, sia da un punto di vista pratico verificando come tali modifiche, inserite nel codice Lagrangiano SPH GADGET, migliorano la trattazione delle instabilità idrodinamiche. Le modifiche sono state proposte in due differenti lavori da Wadsley [20] e da Price [11], l'implementazione nel codice GADGET, l'esecuzione dei test e la successiva analisi rappresentano la prima parte del lavoro originale presentato in questa tesi.

Capitolo 4: La diffusione chimica in SPH

In questo capitolo discuteremo la soluzione teorica dell'equazione della diffusione che è la base per la trattazione della diffusione chimica. Si utilizzerà la traduzione in uno schema SPH di una soluzione implicita dell'equazione della diffusione per i metalli. Tale modifica sarà applicata a dei semplici problemi di test per studiarne la correttezza. Tale soluzione all'equazione della diffusione è stata proposta da Greif [21], mentre l'implementazione in GADGET e i test rappresentano la seconda parte del lavoro originale presentato in questa tesi.

¹<http://www.mpa-garching.mpg.de/gadget/>

Capitolo 1

Concetti base di fluidodinamica

In questo lavoro di tesi ci si concentrerà principalmente sulla della descrizione numerica della componente barionica, che insieme a materia oscura e stelle, rappresenta il costituente principale delle simulazioni numeriche astrofisiche. Nelle simulazioni dei processi astrofisici la materia oscura e le stelle possono essere trattate come fluidi non collisionali. Per quanto riguarda il gas, invece, questo non è possibile dato che le interazioni collisionali fra particelle non sono trascurabili. Quindi, per simulare i processi fisici che coinvolgono il gas, dobbiamo ricorrere ad una diversa trattazione rispetto a quella usata per i fluidi non collisionali, preservando al contempo l'interazione gravitazionale fra queste tre differenti componenti.

In questo capitolo si discuteranno le basi dell'idrodinamica classica che ci permettono di descrivere la fisica dei gas. Una trattazione più dettagliata si può trovare nei libri di testo fluidodinamica e di fisica statistica [5, 4].

Nel capitolo successivo si analizzerà, invece, come è possibile simulare numericamente il comportamento di un gas.

1.1 Gas perfetto

Nei gas ideali le particelle, siano esse atomi o molecole, sono libere di muoversi lungo traiettorie rettilinee fino a quando collidono con altre particelle cambiando direzione. Tali urti a due corpi sono perfettamente elastici e le particelle sono considerate puntiformi, dato che la loro dimensione è molto minore del loro cammino libero medio. Inoltre tali particelle si assume che non abbiano interazioni con le altre particelle se non tramite gli urti, e quindi in mancanza di tali eventi si muovano su traiettorie perfettamente lineari. Il gas perfetto rappresenta un modello idealizzato che però diviene una buona approssimazione di un gas reale che si trovi in condizioni di bassa densità e alta temperatura. In astrofisica il gas presente nelle stelle e nelle atmosfere dei pianeti gassosi spesso non può essere trattato come ideale (in una stella come il sole la densità media del nucleo è di $1,5 \times 10^5 \text{ kg/m}^3$ con una temperatura media di 10^7 K) mentre il gas presente

nel mezzo interstellare è descrivibile dall'equazione di stato dei gas perfetti (il gas interstellare ha temperature che vanno dalle decine alle migliaia di Kelvin e densità comprese fra uno e 10^6 un atomi su centimetro cubo). Tipicamente, perché un fluido sia descrivibile come gas perfetto, si richiede che il libero cammino medio fra due collisioni consecutive sia molto minore della scala spaziale su cui tipicamente si studia il fluido.

Per un fluido ideale, l'equazione di stato che lega temperatura T , pressione P e densità numerica n è:

$$P = nk_B T, \quad (1.1)$$

dove $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{erg/K}$ è la costante di Boltzmann. L'equazione di stato è anche esprimibile in termini di temperatura T , pressione P , densità in massa ρ e peso molecolare medio per particella $\mu = M/N$, dove M corrisponde la massa totale del gas e N il numero di particelle che lo compongono. Usando tali grandezze l'Eq(1.1) diventa:

$$P = \frac{\rho k_B T}{\mu}. \quad (1.2)$$

Per un gas ideale è anche possibile esprimere la pressione in termini di densità ed energia interna specifica u come:

$$P = (\gamma - 1)\rho u. \quad (1.3)$$

dove γ è l'indice politropico del gas. Quest'ultima equazione di stato è la più diffusa nelle simulazioni idrodinamiche in quanto, in tali simulazioni, viene calcolata la variazione di energia interna invece che la variazione della temperatura. L'indice politropico per un gas ideale dipende dai gradi di libertà delle particelle che lo compongono, infatti:

$$\gamma = \frac{f + 2}{f} \quad (1.4)$$

dove f rappresenta i gradi di libertà associati ad ogni singolo costituente del gas. Per quanto riguarda un gas monoatomico, esso è formato da particelle che possiedono solamente tre gradi di libertà traslazionali associati alle tre dimensioni spaziali. Quindi, per un gas di idrogeno monoatomico l'indice politropico sarà $\gamma = \frac{5}{3}$. Per un gas diatomico, oltre a i tre gradi di libertà traslazionali, ve ne sono anche due rotazionali. Quindi per un gas di idrogeno molecolare H_2 l'indice politropico sarà $\gamma = \frac{7}{5} = 1.4$.

In una compressione o espansione adiabatica la pressione è legata alla densità dalla formula:

$$P = A\rho^\gamma \quad (1.5)$$

dove A è correlata alla densità di entropia s dalla formula:

$$s = s_0 + \frac{k_B}{\mu(\gamma - 1)} \log(A), \quad (1.6)$$

e rimane costante per un fluido senza viscosità né shock. Da tale equazione si ricava la velocità del suono, che per un fluido adiabatico è:

$$c_{s,ad}^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho} = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma(\gamma - 1)u. \quad (1.7)$$

Per un'onda di pressione isoterma, in cui l'entropia non è conservata diversamente dall'energia interna, la velocità del suono sarà:

$$c_{s,iso}^2 = \frac{P}{\rho} = (\gamma - 1)u. \quad (1.8)$$

1.2 Equazioni di Eulero

Il moto di un fluido è completamente descritto dalle leggi di conservazione della massa, del momento e dell'energia. Queste leggi possono essere scritte sotto forma di equazioni alle derivate parziali oppure nella loro forma integrale.

1.2.1 Conservazione della massa

Per studiare l'evoluzione del del gas si consideri un volume arbitrario V , tale volume è delimitato da una superficie S . La superficie è rappresentabile come somma di infinitesimi di area dS caratterizzati ognuno da un versore \hat{n} ad essi ortogonale e diretto verso l'esterno del volume. Per la conservazione della massa la variazione in massa all'interno del volume V deve essere interamente dovuta al flusso di massa attraverso la superficie S :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \int_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS. \quad (1.9)$$

Usando il teorema di Gauss si ottiene dall'equazione precedente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \int_V \nabla \cdot \dots (\rho \vec{v}) dV. \quad (1.10)$$

Essendo tale equazione valida qualunque volume si scelga, si arriva alla formulazione differenziale dell'equazione di continuità:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \dots (\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.11)$$

1.2.2 Conservazione del momento

Entro il volume V anche la densità di momento $\rho \vec{v}$ è una quantità conservata, a meno di forze esterne. Il momento totale entro il volume sarà quindi l'integrale volumetrico di ρv_i , con l'indice i che corre sulle tre componenti della velocità lungo x , y , e z . L'integrale volumetrico del momento sarà uguale all'integrale del flusso di momento $\rho v_i \vec{v} \cdot \hat{n}$ attraverso la superficie S che racchiude il volume

V . Come già detto, bisogna tenere conto anche delle forze esterne che agiscono sulla superficie S dovute al gas esterno. Su ogni elementino di superficie la forza esterna dovuta al gas sarà $-P\hat{n}dS$ con P la pressione del gas. Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \int_S \rho v_i \vec{v} \cdot \hat{n} dS - \int_S P dS. \quad (1.12)$$

Usando la notazione vettoriale e quindi riassumendo le tre differenti equazioni in un'unica equazione, usando \vec{v} invece che v_i , questa formula diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (\rho \vec{v}) dV = - \int_S (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \hat{n} dS - \int_S P \hat{n} dS. \quad (1.13)$$

A questo punto per poter usare il teorema di Gauss e passare all'equazione alle derivate parziali, la quantità P dovrebbe essere vettoriale. Possiamo però introdurre la quantità tensoriale \mathbf{I} che rappresenta la versione tensoriale della delta di Kronecker δ_{ij} , e riscrivere $-P\hat{n}$ come $-\mathbf{I}P \cdot \hat{n}$. Otterremo quindi di poter riscrivere la formula precedente come:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \vec{v} dV = - \int_V \nabla(\rho \vec{v} \vec{v} + \mathbf{I}P) dV, \quad (1.14)$$

riscrivibile come equazione differenziale alle derivate parziali nella forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{v} + \nabla(\rho \vec{v} \vec{v} + \mathbf{I}P) = 0, \quad (1.15)$$

dove la quantità $\rho \vec{v} \vec{v} + \mathbf{I}P$ è definita come tensore di stress del fluido. L'equazione precedente può anche essere riscritta nella notazione più usuale come:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{v} + \nabla(\rho \vec{v} \vec{v}) + \nabla P = 0. \quad (1.16)$$

Includendo l'azione di una forza esterna che agisca su tutto il volume del gas, come la gravità, otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{v} + \nabla(\rho \vec{v} \vec{v}) + \nabla P = -\rho \nabla \Phi, \quad (1.17)$$

dove Φ rappresenta il potenziale gravitazionale. Esprimendo questa formula in notazione tensoriale otteniamo:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k + \delta_{ik} P) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (1.18)$$

1.2.3 Conservazione dell'energia

L'energia totale specifica per unità di massa del fluido, indicata con e , è costituita dalla somma dell'energia cinetica specifica $e_{kin} = \frac{v^2}{2}$ e dell'energia termica specifica u . Quindi l'energia totale è l'integrale di $\rho(u + \frac{v^2}{2})$ sul volume V . Il flusso di

energia attraverso S sarà l'integrale sulla superficie di $\rho(u + \frac{v^2}{2})\vec{v} \cdot \hat{n}$. Dalla prima legge della termodinamica $dU = TdS - PdV$, la variazione di energia è anche dovuta al lavoro compiuto sul volume dal gas esterno. L'integrale volumetrico di PdV , e quindi il lavoro compiuto dalla pressione P , sarà uguale all'integrale sulla superficie del flusso di pressione attraverso la superficie $P dS \vec{v} \cdot \hat{n}$. Quindi la conservazione dell'energia può essere espressa come:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = - \int_S \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) \vec{v} \cdot \hat{n} dS - \int_S P \vec{v} \cdot \hat{n} dS. \quad (1.19)$$

Usando il teorema di Gauss otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) dV + \int \nabla \cdot \left[\left(\rho u + \rho \frac{1}{2} v^2 + P \right) \vec{v} \right] dV = 0, \quad (1.20)$$

è quindi possibile riscrivere la conservazione dell'energia sotto forma di equazione differenziale alle derivate parziali come:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\rho e + \rho \frac{1}{2} v^2 + P \right) \vec{v} \right] = 0. \quad (1.21)$$

1.3 Equazioni di Eulero in formulazione Lagrangiana

Le equazioni dell'idrodinamica fino ad ora presentate sono in formulazione Euleriana, ossia la variazione delle quantità viene studiata in un punto fisso dello spazio. È possibile, invece, studiare come variano le quantità idrodinamiche seguendo il flusso del gas durante il suo moto. Questo schema, detto Lagrangiano, ci permette di seguire l'evoluzione del gas in un sistema di riferimento solidale con le particelle che lo compongono. Per ottenere le equazioni dell'idrodinamica in formulazione Lagrangiana si deve introdurre la derivata Lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla, \quad (1.22)$$

che permette di studiare la variazione di una funzione lungo una linea di flusso. Usando questa formulazione per la derivata si possono riscrivere le equazioni dell'idrodinamica in formulazione Lagrangiana. Questa formulazione Lagrangiana verrà successivamente usata nelle simulazioni numeriche della componente barionica.

1.3.1 Conservazione della massa

Nella formulazione Lagrangiana l'equazione di continuità diventa:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \cdot \nabla \vec{v}. \quad (1.23)$$

Tale equazione esprime la variazione di densità di una porzione di fluido, a causa della presenza di flussi divergenti o convergenti di gas.

1.3.2 Conservazione del momento

L'equazione del momento in formulazione Euleriana Eq. (1.16) può essere riscritta come:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{v} \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \nabla P = 0, \quad (1.24)$$

che usando l'equazione di continuità Eq. (1.11) diventa:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} (\nabla \cdot \vec{v}) + \nabla P = 0, \quad (1.25)$$

infine, usando la derivata Lagrangiana, otteniamo la formulazione Lagrangiana dell'equazione di conservazione del momento:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho}. \quad (1.26)$$

Tale equazione esprime la variazione del momento a causa di una forza dovuta al gradiente della pressione. Qualsiasi altra forza esterna, come la gravità, può facilmente essere aggiunta nel secondo termine dell'equazione Eq. (1.26).

1.3.3 Conservazione dell'energia

Per quanto riguarda l'equazione della conservazione dell'energia possiamo procedere come già fatto nelle sezioni precedenti. Usando l'Eq. (1.11) e la definizione di derivata Lagrangiana si ottiene l'equazione per la conservazione dell'energia nella formulazione Lagrangiana:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \vec{v} - \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \nabla P. \quad (1.27)$$

con $e = u + \frac{v^2}{2}$ la densità di energia totale. Esplicitando l'energia totale come somma di energia cinetica ed energia termica ed usando, inoltre, l'equazione per il momento Eq. (1.26) otteniamo l'equazione per la variazione dell'energia termica in formulazione Lagrangiana:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \vec{v}. \quad (1.28)$$

Quindi una porzione di fluido non varia la sua energia interna specifica se non tramite una compressione, o espansione, adiabatica.

Usando la prima legge della termodinamica espressa in termini di energia interna specifica u , densità ρ e entropia specifica s otteniamo:

$$du = Tds - Pd \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (1.29)$$

Usando la derivata Lagrangiana invece del differenziale, e facendo uso dell'equazione di continuità Eq. (1.11) otteniamo:

$$\frac{du}{dt} = T \frac{ds}{dt} - \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{v}, \quad (1.30)$$

che usando l'Eq. (1.28) ci porta a concludere:

$$T \frac{ds}{dt} = 0 \quad (1.31)$$

ossia che l'entropia di una porzione di fluido non varia durante il moto. Quindi le equazioni dell'idrodinamica ricavate fino ad ora conservano l'entropia.

Questa affermazione rimane vera solamente per flussi continui di gas, infatti, in presenza di discontinuità idrodinamiche, l'entropia non è più conservata.

1.4 Discontinuità e Shock idrodinamici

Le equazioni dell'idrodinamica possono ammettere soluzioni discontinue. Questo significa che, su certe superfici dette di discontinuità, alcune delle grandezze che caratterizzano il fluido saranno discontinue.

Queste discontinuità possono essere tangenziali oppure onde d'urto, dette anche shock. Le discontinuità tangenziali sono caratterizzate da due fluidi diversi che giacciono uno accanto all'altro. Esse sono caratterizzate dall'assenza di un flusso di materia attraverso la superficie di separazione. Tali discontinuità sono in genere molto instabili e quindi di breve durata. Negli shock, invece, è presente un flusso di materia, nonché di impulso ed energia, attraverso la superficie di separazione. Nel caso in cui le perturbazioni di un sistema siano piccole, infinitesime, esse danno origine ad onde sonore [5]. Diversamente accade quando l'ampiezza della perturbazione non è infinitesima, in questo caso si creerà uno shock idrodinamico. Considerando ad esempio il caso di un'onda di densità semplice in un mezzo omogeneo, si sviluppa una differenza di velocità non trascurabile fra gli elementi di fluido nella cresta dell'onda e quelli nel ventre. In particolare la velocità di propagazione cresce al crescere della densità, e perciò la cresta raggiungerà il ventre in un tempo finito formando una superficie di discontinuità.

1.4.1 Discontinuità e condizioni di Rankine-Hugoniot

Cerchiamo di capire sotto quali condizioni una soluzione discontinua è fisicamente accettabile per le equazioni dell'idrodinamica e quali sono le caratteristiche di tali soluzioni.

Consideriamo per semplicità il caso di simmetria planare in cui tutte le quantità dipendono solo dalla coordinata x perpendicolare alla superficie. Si consideri un fluido in stato stazionario, ponendosi in un sistema di riferimento istantaneamente a riposo rispetto alla superficie di discontinuità. Essendo il sistema in uno stato stazionario, delle equazioni della fluidodinamica Eq. (1.11), Eq. (1.16) e Eq. (1.21), si annulla il termine che dipende dal tempo, rimanendo soltanto la dipendenza dalla posizione lungo x . Indicando con J un generico flusso, che rappresenta a seconda del caso il flusso di materia, il flusso di momento o il flusso

di energia, possiamo riassumere le tre equazioni come:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad (1.32)$$

e quindi calcolare la variazione di J attraverso la superficie di contatto

$$\int_{-\eta}^{+\eta} \frac{\partial J}{\partial x} dx = J_2 - J_1 \quad (1.33)$$

in cui l'integrale è esteso ad un intervallo infinitesimo di lunghezza 2η , comprendente la superficie di discontinuità.

Quindi affinché le soluzioni possano essere discontinue, il flusso della generica quantità J deve essere continuo. Introducendo la notazione $[J] \equiv J_2 - J_1$, dove l'indice 1 rappresenta il valore del flusso da un lato della discontinuità e l'indice 2 indica il valore del flusso dal lato opposto, troviamo le condizioni per le quantità coinvolte nelle equazioni dell'idrodinamica, per il flusso di massa:

$$[\rho v_x] = 0, \quad (1.34)$$

di momento:

$$[P + \rho v_x^2] = 0, \quad (1.35)$$

e di energia:

$$\left[\rho v_x \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \right] = 0, \quad (1.36)$$

per quanto riguarda la componente perpendicolare. Le condizioni per le componenti parallele alla superficie di discontinuità sono invece:

$$[\rho v_x v_y] = 0 \quad (1.37)$$

$$[\rho v_x v_z] = 0 \quad (1.38)$$

Per la discontinuità di tipo tangenziale, dove non c'è flusso di massa attraverso la superficie, abbiamo che $\rho^{(1)} v_x^{(1)} = \rho^{(2)} v_x^{(2)} = 0$. Essendo che le densità sono diverse da zero, ne consegue che $v_x^{(1)} = v_x^{(2)} = 0$ ed usando l'Eq. (1.35) otteniamo $[P] = 0$. Quindi per le discontinuità di tipo tangenziale tutte le quantità termodinamiche possono essere discontinue esclusa la pressione. Un particolare tipo di discontinuità tangenziale è la discontinuità di contatto, dove le velocità sono continue, ma le densità non lo sono.

Negli shock, invece, abbiamo un flusso di massa attraverso la superficie della discontinuità, quindi $v_x^{(1)}$ e $v_x^{(2)}$ sono non nulle. Usando l'Eq. (1.37) e l'Eq. (1.38) si vede che le velocità parallele alla superficie di discontinuità sono continue, mentre le equazioni per le altre quantità idrodinamiche sono:

$$[\rho v_x] = 0, \quad (1.39)$$

$$[P + \rho v_x^2] = 0, \quad (1.40)$$

$$\left[u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right] = 0. \quad (1.41)$$

Queste tre equazioni vengono dette condizioni di Rankine-Hugoniot.

1.4.2 Proprietà degli shock

Usando l'indice 1 per le quantità prima dello shock, dove il verso è dato dalla velocità di propagazione di quest'ultimo, e l'indice 2 per quelle subito dopo, nel sistema di riposo dello shock, si vedrà il fluido avvicinarsi con velocità $v^{(1)}$. Definiamo il numero di Mach dello shock come il rapporto $M^{(1)} = \frac{v^{(1)}}{c_s^{(1)}}$, dove $c_s^{(1)}$ è la velocità del suono adiabatica prima dello shock. Si può dimostrare che valgono le seguenti identità:

$$\frac{\rho_{(2)}}{\rho_{(1)}} = \frac{v_{(2)}}{v_{(1)}} = \frac{(\gamma + 1)M_{(1)}^2}{(\gamma - 1)M_{(1)}^2 + 2} \quad (1.42)$$

$$\frac{P_{(2)}}{P_{(1)}} = \frac{2\gamma M_{(1)}^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (1.43)$$

$$\frac{T_{(2)}}{T_{(1)}} = \frac{(2\gamma M_{(1)}^2 - \gamma + 1)((\gamma - 1)M_{(1)}^2 + 2)}{(\gamma + 1)^2 M_{(1)}^2} \quad (1.44)$$

Il numero di Mach dopo lo shock sarà:

$$M_{(2)}^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_{(1)}^2}{2\gamma M_{(1)}^2 - \gamma + 1}, \quad (1.45)$$

di cui è possibile trovare la derivazione completa in [5]. Dalle equazioni precedenti si vede che uno shock, per quanto forte ($M_{(1)} \gg 1$), comprime il gas in maniera modesta, dato che il fattore di compressione dipende da γ . Nel contempo, però, può riscaldarlo moltissimo, infatti $\frac{T_{(2)}}{T_{(1)}} \propto M_{(1)}^2$. Quindi lo shock converte l'energia cinetica in energia termica. Inoltre si vede che uno shock è sempre supersonico in quanto se $M_{(1)} < 1$ otterremo che $T_{(2)} < T_{(1)}$ in quanto il rapporto di temperatura dipende dal numero di Mach, mentre $v_{(2)} > v_{(1)}$ dato che il rapporto delle velocità dipende principalmente da γ . Fisicamente questo si traduce in una conversione di energia interna in energia cinetica delle particelle nella regione post-shock, senza altri effetti, e questo contraddice il secondo principio della termodinamica.

Quindi le onde d'urto trasformano l'energia cinetica in energia termica con forte produzione di entropia. Il processo fisico che permette tale trasferimento di energia sono le collisioni molecolari. Ovviamente le simulazioni non risolvono le collisioni molecolari, ma permettono comunque questo trasferimento di energia implementando un modello di viscosità artificiale. Nel prossimo capitolo si descriverà nel dettaglio la traduzione numerica di uno schema Lagrangiano per la fluidodinamica.

Capitolo 2

Smoothed Particle Hydrodynamics

In questo capitolo presenteremo la formulazione lagrangiana SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) per l'idrodinamica, tratteremo la sua implementazione nel codice GADGET e discuteremo le limitazioni di un approccio SPH.

2.1 Formulazione teorica ed equazioni di base

Il metodo SPH è una traduzione numerica dell'approccio Lagrangiano all'idrodinamica. Si tratta sostanzialmente di discretizzare un campo continuo, numericamente molto complesso da simulare, in un campo discreto che ne riproduca gli effetti. Questa operazione viene fatta tramite un campionamento del campo continuo in dei punti, e assegnando successivamente a questi punti un valore pesato tramite la funzione di kernel.

Le equazioni fondamentali dell'idrodinamica, come visto in sezione 1 hanno la forma generale

$$\frac{df}{dt} = g(f, \nabla f, \vec{r}, \vec{v}) \quad (2.1)$$

dove la derivata Lagrangiana è:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \quad (2.2)$$

Alla base dell'approccio SPH sta l'approssimazione della funzione $f(\vec{r})$ tramite la convoluzione della stessa con un kernel W :

$$\tilde{f}_h(\vec{r}) = \int f(\vec{r}') W(\vec{r} - \vec{r}', h) d^3r'. \quad (2.3)$$

La funzione W dipende dalla lunghezza di *smoothing* h . È possibile ritrovare la funzione di partenza nel limite $h \rightarrow 0$ in modo che il kernel $W \rightarrow \delta_D$, dove δ_D è la funzione delta di Dirac. Quindi a parte per la normalizzazione, la funzione

di kernel deve avere le proprietà di una distribuzione a delta di Dirac quando h tende a zero.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{f}_h(\vec{r}) = f(\vec{r}) \quad \text{e} \quad \int W(\vec{r} - \vec{r}', h) d^3 r' = 1 \quad (2.4)$$

Per ottenere una discretizzazione possiamo approssimare l'integrale a una somma su elementi di fluido di massa m_b con densità ρ_b e posizione \vec{r}_b .

Il valore che il campo assumerà in corrispondenza di questo elemento di fluido sarà $f_b = f(\vec{r}_b)$:

$$\tilde{f}_h(\vec{r}) = \int \frac{f(\vec{r}')}{\rho(\vec{r}')} W(\vec{r} - \vec{r}', h) \rho(\vec{r}') d^3 r', \quad (2.5)$$

Passando ad una rappresentazione discreta dell'integrale, si ottiene:

$$\tilde{f}_h(\vec{r}) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} f_b W(\vec{r} - \vec{r}_b, h). \quad (2.6)$$

E quindi per la densità, usando Eq. (2.6) otteniamo:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_b m_b W(\vec{r} - \vec{r}_b, h). \quad (2.7)$$

Questo calcolo della densità tramite una sommatoria è formalmente esteso su tutte le particelle. Storicamente la prima scelta del kernel è ricaduta su una funzione gaussiana del tipo:

$$W(x, h) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{h^2}}. \quad (2.8)$$

Questa funzione di kernel è non nulla in una regione infinita dello spazio, ha quindi un supporto non compatto. Dato che la somma di Eq. 2.7 viene pesata col kernel, si sceglie un kernel a supporto compatto, come descritto in Sez. 2.1.2, in modo da ridurre la somma solo ai vicini e rendere quindi il calcolo numericamente meno dispendioso.

Vedremo in seguito, Sez. (2.1.5), come sia possibile scegliere la smoothing length h in modo da ottenere una risoluzione spazialmente adattiva.

2.1.1 Derivate dei campi in approssimazione SPH

Per calcolare le derivate dei campi che compaiono nelle equazioni di base dell'idrodinamica, come visto nel capitolo 1, possiamo prendere l'Eq. (2.6), che descrive la discretizzazione SPH di un campo continuo, e calcolarne direttamente il gradiente. Questa operazione non presenta difficoltà dato che il kernel sarà scelto come una funzione analitica e derivabile. Otteniamo quindi:

$$\nabla f(\vec{r}) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} f_b \nabla W(\vec{r} - \vec{r}_b, h). \quad (2.9)$$

Ora però ci sono processi fisici, come la conduzione termica e in genere tutti i processi diffusivi, che richiedono le derivate seconde dei campi. Sarà utile quindi sarà utile procedere con un'ulteriore derivazione.

Si potrebbe procedere esattamente come fatto per la derivata prima e quindi derivare l'Eq. (2.9). Questa derivazione diretta porta a una formulazione per il laplaciano che è molto sensibile alla distribuzione spaziale delle particelle, e quindi introduce un effetto spurio, di rumore, nei processi che usano le derivate seconde dei campi SPH. Si usa invece la seguente formula

$$(\nabla^2 f)_a = 2 \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (f_a - f_b) \frac{w_{ab}}{r_{ab}}, \quad (2.10)$$

dove w_{ab} è legato al kernel da $\nabla W_{ab} = \hat{e}_{ab} w_{ab}$, \hat{e}_{ab} è il versore che va dalla particella b alla particella a , $\hat{e}_{ab} = \vec{r}_{ab}/r_{ab}$ e $\vec{r}_{ab} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$. Una trattazione più estesa di questa diversa formulazione può essere trovata in [14, 29].

2.1.2 Scelta del Kernel

Una delle caratteristiche generalmente richieste per la forma analitica della funzione che rappresenta il kernel è il supporto compatto, ossia che la funzione sia non nulla solo entro un dominio chiuso e limitato. Questo permette di restringere il numero di particelle che contribuiscono alla sommatoria di Eq. (2.6) che altrimenti si estenderebbe su tutte le N particelle, rendendo il metodo computazionalmente molto dispendioso.

Nella maggioranza delle simulazioni astrofisiche il kernel può avere simmetria radiale $W(\vec{r}-\vec{r}', h) = W(|\vec{r}-\vec{r}'|, h)$. Esistono però dei casi astrofisici, per esempio la simulazione di dischi galattici o protoplanetari di gas, dove il kernel, per motivi geometrici, non deve essere radiale. Questo introduce diversi problemi come la conservazione del momento angolare [15, 16, 17], quindi la scelta usuale è comunque di kernel radiale.

Come ultima cosa, per calcolare le derivate dei campi SPH, come visto in Sez. (2.1.1), si richiede in oltre che il kernel sia differenziabile.

La scelta più comune di funzione di kernel è lo Spline-Cubico continuo fino alla derivata seconda, che in tre dimensioni ha la forma:

$$W(q) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3 & \text{for } 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2-q)^3 & \text{for } 1 < q \leq 2 \\ 0 & \text{for } q > 2 \end{cases} \quad (2.11)$$

dove $q = |\vec{r} - \vec{r}'|/h$. Questo kernel è radiale, ossia dipende solo da $\vec{r} - \vec{r}'$.

Stabilire l'accuratezza del kernel usato, nell'approssimazione di campo continuo, è abbastanza difficile a meno che non si facciano assunzioni molto semplificative sulla distribuzione di particelle SPH, di solito disattese nei casi reali.

Quello che si può fare è espandere $f(\vec{r}')$ nell'approssimazione integrale, Eq. (2.3), in serie di Taylor in un intorno di \vec{r}

$$f(\vec{r}') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(\vec{r})}{k!} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{h} \right)^k. \quad (2.12)$$

Scrivendo esplicitamente l'integrale dei vari termini dell'espansione di Taylor e richiedendo che la differenza fra il campo e la sua approssimazione tenda a zero, si possono costruire funzioni di Kernel con l'accuratezza desiderata. In pratica però bisogna evitare quelle funzioni di kernel che assumono valori negativi. In tal caso infatti si potrebbe ottenere un valore negativo per l'approssimazione SPH della densità, da Eq. (2.7), e quindi un effetto totalmente non fisico.

Con il kernel Spline cubico l'approssimazione integrale, Eq. (2.3), è

$$\tilde{f}_h(\vec{r}) = f(\vec{r}) + C h^2 + O(h^4), \quad (2.13)$$

dove C contiene le derivate seconde di f . Quindi funzioni costanti o lineari sono riprodotte esattamente da Eq. (2.3).

In pratica due approssimazioni vengono fatte: la prima è l'interpolazione integrale, Eq. (2.3), la seconda è la discretizzazione, Eq. (2.6). Come già detto però l'accuratezza dell'approssimazione dipende inoltre dalla distribuzione dei punti interpolanti (particelle SPH).

Molto lavoro è stato fatto per cercare funzioni di kernel migliori, ma alla fine si è visto che l'uso di un kernel Spline-Cubico è quasi sempre preferibile, ed è infatti usato in quasi tutti i codici SPH [7].

Esistono però delle versioni particolarmente raffinate del kernel che sono usate per risolvere la simulazione di instabilità idrodinamiche di Kelvin-Helmholtz [8]. Questo è un approccio totalmente differente da quello trattato in questa tesi per risolvere lo stesso tipo di problema, come vedremo nel Capitolo 3 di questo lavoro di tesi.

2.1.3 Equazione del momento in formulazione SPH

A questo punto si devono tradurre le equazioni dell'idrodinamica lagrangiana in formulazione SPH. Come primo approccio discretizziamo le equazioni nel modo più semplice, come visto nelle sezioni precedenti. Quindi la traduzione SPH della Eq. (1.26) dà:

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = -\frac{1}{\rho_a} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} P_b \nabla_a W_{ab}. \quad (2.14)$$

Questa non è un'approssimazione valida dell'equazione di Eulero perchè non conserva il momento. Per vedere questo consideriamo la forza che la particella b esercita su a :

$$\vec{F}_{ba} = \left(m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_b = -\frac{m_a}{\rho_a} \frac{m_b}{\rho_b} P_b \nabla_a W_{ab}, \quad (2.15)$$

e viceversa la forza esercitata da a su b ,

$$\vec{F}_{ab} = \left(m_b \frac{d\vec{v}_b}{dt} \right)_a = -\frac{m_b m_a}{\rho_b \rho_a} P_a \nabla_b W_{ba} = \frac{m_a m_b}{\rho_a \rho_b} P_a \nabla_a W_{ab}, \quad (2.16)$$

dove $\nabla_a W_{ab} = -\nabla_b W_{ab}$ per kernel radiali [18]. Dato che in generale $P_a \neq P_b$, questa discretizzazione non rispetta la terza legge di Newton di azione e reazione. Quindi il momento totale non è conservato.

Con un approccio leggermente più sofisticato si può ottenere un'equazione conservativa per il momento. Partendo da:

$$\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{\nabla P}{\rho} - P \frac{\nabla \rho}{\rho^2}, \quad (2.17)$$

risolvendo per $\nabla P/\rho$ ed applicando l'Eq. (2.9) per il gradiente, l'equazione per il momento diventa

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_a}{dt} &= -\frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \nabla_a W_{ab} - \sum_b \frac{m_b P_b}{\rho_b \rho_b} \nabla_a W_{ab} \\ &= -\sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dato che ora la parte relativa alla pressione dell'equazione del momento è manifestamente simmetrica in a e b e $\nabla_a W_{ab} = -\nabla_b W_{ba}$, le forze ora sono uguali ed opposte e quindi il momento totale è conservato per costruzione.

2.1.4 Equazione dell'energia in formulazione SPH

L'equazione per l'energia, Eq. (1.28), può essere derivata applicando la discretizzazione SPH, come già visto per l'equazione del momento, in modo semplice ottenendo:

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2} \frac{d\rho_a}{dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2} \frac{d}{dt} \left(\sum_b m_b W_{ab} \right) = \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}, \quad (2.19)$$

dove si è usato $\frac{dW_{ab}}{dt} = \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}$ per kernel radiali [18].

L'equazione di stato per la pressione Eq.(1.3) insieme alle equazioni Eq.(2.7), Eq.(2.18) e Eq.(2.19) formano un set completo di equazioni SPH per l'idrodinamica.

Si può derivare anche una versione alternativa dell'equazione dell'energia, usando l'energia termocinetica specifica $e_a = u_a + \frac{1}{2}v_a^2$ invece che l'energia termica specifica u_a . La corrispondente equazione di evoluzione è:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (P\vec{v}), \quad (2.20)$$

che può essere scritta come

$$\frac{de}{dt} = -\frac{P}{\rho^2} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right), \quad (2.21)$$

e quindi applicando Eq. (2.9) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{de_a}{dt} &= -\frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \rho_b \vec{v}_b \cdot \nabla_a W_{ab} - \vec{v}_a \cdot \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \frac{P_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab} \\ &= -\sum_b m_b \left(\frac{P_a \vec{v}_b}{\rho_a^2} + \frac{P_b \vec{v}_a}{\rho_b^2} \right) \cdot \nabla_a W_{ab}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.1.5 Risoluzione adattiva

Una trattazione lagrangiana per l'idrodinamica ci permette di poter seguire le particelle durante la loro evoluzione. Quindi se imponiamo che la massa di ogni particella sia fissata, le zone di fluido più dense avranno anche maggiori particelle. Questo fa sì che la risoluzione con cui simulo le zone a maggiore densità sarà maggiore per costruzione. Se fisso quindi una risoluzione in massa la risoluzione spaziale sarà automaticamente adattiva in un approccio SPH, dato che riuscirò sempre a risolvere le particelle SPH, indipendentemente da quanto siano esse concentrate.

La risoluzione spaziale, in un approccio SPH, è rappresentata dal valore che assume h , che sta a indicare quanto bene approssimo il campo continuo tramite la discretizzazione.

Ora oltre ad adattare la risoluzione spazialmente la si può anche adattare temporalmente, in modo da campionare meglio il campo di densità durante la sua evoluzione. Un metodo molto usato è scegliere h in modo da tenere costante il numero di vicini [9]. Comunemente si permette che i vicini siano in un intervallo fissato di valori attorno al numero scelto, in modo da velocizzare il processo di ricerca dei vicini e quindi da ottenere una codice più efficiente.

Un secondo metodo consiste nell'integrare un'equazione differenziale per l'evoluzione di h che fa uso dell'equazione di continuità [10]. Usando *l'ansatz* che:

$$\frac{h(t)}{h_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho(t)} \right)^{1/3}, \quad (2.23)$$

dove l'indice 0 sta a indicare le quantità al tempo iniziale, eseguendo la derivata lagrangiana di entrambi i termini ed usando inoltre l'equazione Eq. (1.23) otteniamo:

$$\frac{dh_a}{dt} = \frac{1}{3} h_a (\nabla \cdot \vec{v})_a. \quad (2.24)$$

Un altro modo di far evolvere h è secondo l'equazione

$$h_a = \eta \left(\frac{m_a}{\rho_a} \right)^{1/3}, \quad (2.25)$$

dove h è essenzialmente la dimensione SPH della particella con η parametro libero che può essere o non essere costante [27, 28, 29]. Si noti che tutte le equazioni SPH per l'idrodinamica, derivate fino ad ora in questo capitolo, sono da considerarsi ad h costante nel tempo. La generalizzazione per un h variabile però non presenta problemi di derivazione, come presentato in [18].

2.1.6 La viscosità artificiale

Un approccio Lagrangiano all'idrodinamica offre numerosi benefici ma comporta anche delle limitazioni. Storicamente la prima limitazione riscontrata nell'uso dell'SPH è stata la difficoltà nella descrizione degli shock e delle discontinuità di contatto.

Durante uno shock le condizioni di Rankine-Hugoniot, trattate nella Sez. 1.4.1, predicono l'incremento di entropia del fluido dovuta a una conversione dell'energia meccanica dello shock, in energia termica. Oltre a questo, nelle simulazioni SPH, si è visto che durante gli shock le particelle tendono a compenetrarsi molto più di quanto dovrebbe accadere, infatti tale compenetrazione dovrebbe limitarsi a una zona ristretta attorno all'onda d'urto. Questo accade perchè le particelle SPH non hanno una dimensione fisica, ma solo numerica, esse potranno avvicinarsi molto le une alle altre e addirittura attraversarsi se non si impone che questo non accada.

Quindi serve un termine di viscosità, detto di viscosità artificiale, che si deve occupare di dissipare le differenze locali di velocità dovute all'onda d'urto e di convertirle in energia termica. Tale termine deve inoltre impedire una compenetrazione eccessiva degli elementi di fluido.

La viscosità artificiale non ha niente a che vedere con la viscosità fisica che agisce su scale molecolari. Quindi, per quanto riguarda una simulazione con particelle di gas con masse dell'ordine di diverse masse solari, la viscosità fisica dovrebbe agire entro le particelle SPH e su scale di massa che non vengono risolte dalle simulazioni. La viscosità artificiale, invece, agisce fra le particelle SPH e non all'interno di esse.

La viscosità artificiale richiesta per risolvere questi problemi però è molto maggiore della viscosità fisica del fluido. Questo può portare a degli effetti non fisici anche in zone che non sono in vicinanza dello shock, come trattato in Sez.2.3.1.

Quello che si cerca di fare è creare modelli che siano il più possibile limitati negli effetti alle zone in presenza di shock e nulli altrove.

L'approccio più usato è quello di combinare due termini di pressione dovuti a questa viscosità artificiale. Il primo termine introdotto da von Neumann e Richtmyer, è un termine di pressione artificiale che dà buoni risultati nella simulazione di shock forti, ed è della forma:

$$P_{\text{NR}}^{\text{AV}} = c_2 \rho l^2 (\nabla \cdot \vec{v})^2, \quad (2.26)$$

dove c_2 è un parametro adimensionale dell'ordine dell'unità. Il termine $P_{\text{NR}}^{\text{AV}}$ va aggiunto al termine di pressione idrodinamica.

Una viscosità artificiale basata soltanto su una sovrappressione descritta in Eq. (2.26) presenta comunque degli effetti di oscillazione spuri nella zona post-shock. Per diminuire gli effetti spuri un altro termine di sovrappressione è solitamente usato in aggiunta a $P_{\text{NR}}^{\text{AV}}$, come proposto in [31]. Il termine usato è

$$P_{\text{b}}^{\text{AV}} = -c_1 \rho c_s l (\nabla \cdot \vec{v}), \quad (2.27)$$

che ha la forma di una viscosità di bulk [5]. Questo termine ha la proprietà di annullarsi meno rapidamente allontanandosi dal fronte dello shock. Nella formula c_s è la velocità del suono, c_1 è un parametro adimensionale dell'ordine dell'unità, l ($\nabla \cdot \vec{v}$) e il termine che serve a stimare la differenza di velocità fra particelle vicine.

Quindi i due termini possono essere combinati per ottenere:

$$P_{\text{visc}}^{\text{AV}} = -c_1 \rho c_s l (\nabla \cdot \vec{v}) + c_2 \rho l^2 (\nabla \cdot \vec{v})^2. \quad (2.28)$$

Come già detto la viscosità artificiale deve servire anche per dissipare il momento, quindi oltre che aggiungere un termine ulteriore alla pressione P_a di ogni singola particella, si modifica consistentemente anche l'equazione del momento (2.18), di un contributo di viscosità artificiale:

$$\Pi_{ab} = \frac{P_{\text{visc}}^{\text{AV}}}{\rho_{ab}^2} \quad (2.29)$$

cosicchè

$$\left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \rightarrow \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right). \quad (2.30)$$

Per trovare l'espressione di questo contributo aggiuntivo in formulazione SPH ci si restringe al caso 1D per semplicità. Il contributo della viscosità di bulk a Π_{ab} avrà la forma $-c_1 c_s (h/\rho) \partial v / \partial x$. L'espansione di Taylor del campo di velocità, $v(x_a + (x_b - x_a))$, permette di scrivere la derivata del campo di velocità nella forma:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_a = \frac{v_b - v_a}{x_b - x_a} + O((x_b - x_a)^2). \quad (2.31)$$

Usando questa approssimazione e sostituendo le proprietà delle particelle con le loro quantità medie $\bar{A}_{ab} = (A_a + A_b)/2$, usando la notazione $x_{ab} = x_a - x_b$ e sostituendo il denominatore per evitare che diverga con

$$\frac{1}{x_{ab}} \rightarrow \frac{x_{ab}}{x_{ab}^2 + \epsilon \bar{h}_{ab}^2}, \quad (2.32)$$

dove $\epsilon \bar{h}_{ab}^2$ è un numero piccolo ma che impedisce al denominatore di diventare nullo, la versione SPH della viscosità di bulk diventa

$$\Pi_{ab,\text{bulk}} = \begin{cases} -c_1 \frac{\bar{c}_{s,ab}}{\rho_{ab}} \mu_{ab} & \text{for } x_{ab} \cdot v_{ab} < 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \text{ dove } \mu_{ab} = \frac{\bar{h}_{ab} x_{ab} v_{ab}}{x_{ab}^2 + \epsilon \bar{h}_{ab}^2}. \quad (2.33)$$

La condizione per $x_{ab} \cdot v_{ab} < 0$ serve per accendere la viscosità soltanto in presenza di un flusso convergente. La quantità μ_{ab} prende il ruolo del termine $l(\nabla \cdot \vec{v})$ nella trattazione originale di von Neumann e Richtmyer. Ora quindi possiamo trattare il termine $P_{\text{NR}}^{\text{AV}}$ esattamente nello stesso modo. Con la notazione usuale adottata nell'SPH $c_1 \rightarrow \alpha$, $c_2 \rightarrow \beta$, il termine di viscosità artificiale diventa:

$$\Pi_{ab} = \Pi_{ab,\text{bulk}} + \Pi_{ab,\text{NR}} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ab} \mu_{ab} + \beta \mu_{ab}^2}{\rho_{ab}} & \text{per } \vec{r}_{ab} \cdot \vec{v}_{ab} < 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}. \quad (2.34)$$

Dato che si è passati ad una trattazione tridimensionale le quantità scalari sono state sostituite da quelle vettoriali.

Da simulazioni numeriche fatte per testare il funzionamento di questa viscosità artificiale in problemi idrodinamici la cui soluzione è nota, si adottano usualmente i seguenti valori dei parametri: $\alpha \approx 1$, $\beta \approx 2$ e $\epsilon \approx 0.01$.

Tenendo conto della viscosità artificiale l'equazione del momento viene modificata in

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab}. \quad (2.35)$$

Lo stesso vale per l'equazione dell'energia che diventa

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab} + \frac{1}{2} \sum_b m_b \Pi_{ab} \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (2.36)$$

Questa implementazione della viscosità nelle equazioni SPH per l'idrodinamica conserva esplicitamente energia e momento angolare per costruzione.

2.1.7 Forme alternative di viscosità artificiale

Nel tempo sono state formulate diverse versioni di viscosità artificiale oltre a quella standard presentata nella sezione precedente. Queste versioni alternative hanno lo scopo di ridurre il più possibile gli effetti della viscosità in regioni il più possibile limitate alla zona di shock.

La formulazione alternativa più usata è la viscosità artificiale dipendente dal tempo, come presentata da Morris and Monaghan [32], unitamente al cosiddetto *Balsara-switch*, come presentato da Balsara in [41].

Balsara-switch

Il *Balsara-switch* ha lo scopo di distinguere gli eventi di shock dal flusso laminare e sopprimere la viscosità artificiale in quest'ultimo caso. Si definisce la quantità

$$f_a = \frac{|\langle \nabla \cdot \vec{v} \rangle_a|}{|\langle \nabla \cdot \vec{v} \rangle_a| + |\langle \nabla \times \vec{v} \rangle_a| + 0.0001 c_{s,a}/h_a} \quad (2.37)$$

dove $c_{s,a}$ è la velocità del suono per la particella a e h_a la sua lunghezza di smoothing. Si definisce $\bar{f}_{ab} = \frac{f_a + f_b}{2}$ la media di f per la coppia di particelle a e b . Applichiamo a Π_{ab} questo limitatore in modo da ottenere:

$$\Pi'_{ab} = \Pi_{ab} \bar{f}_{ab}, \quad (2.38)$$

che rappresenta il termine classico di viscosità artificiale pesato con il limitatore f . Il limitatore di viscosità è formulato in modo che durante una compressione, quando la divergenza del campo di velocità sarà diversa da zero $|\langle \nabla \cdot \vec{v} \rangle| \neq 0$ e il rotore sarà nullo $|\langle \nabla \times \vec{v} \rangle| = 0$, l'Eq. (2.37) si ridurrà all'unità e la viscosità rimarrà inalterata. Diversamente, in un flusso perfettamente laminare, la divergenza del campo di velocità sarà nulla ($|\langle \nabla \cdot \vec{v} \rangle| = 0$ ed invece il rotore sarà diverso da zero $|\langle \nabla \times \vec{v} \rangle| \neq 0$). Quindi durante il flusso laminare la viscosità risulterà soppressa di un fattore ($\bar{f}_{ab} \ll 1$).

Viscosità artificiale dipendente dal tempo

Nel modello di viscosità artificiale dipendente dal tempo l'idea centrale è di avere dei parametri α e β distinti per ogni particella, in modo da localizzare nello spazio l'effetto della viscosità. Inoltre tali parametri evolvono nel tempo. Fissando $\beta = 2\alpha$, α_a evolve secondo l'equazione differenziale:

$$\frac{d\alpha_a}{dt} = -\frac{\alpha_a - \alpha_{min}}{\tau_a} + S_a. \quad (2.39)$$

Quindi in assenza di sorgente \mathcal{S} , α decade esponenzialmente a α_{min} su un tempo caratteristico di τ_a . Tale tempo caratteristico τ_a è calcolato in modo che la viscosità persista solo per alcune smoothing length dopo lo shock. Questo può essere ottenuto calcolando τ_a come:

$$\tau_a = \frac{h_a}{\mathcal{C} v_{sig}}, \quad (2.40)$$

dove v_{sig} è la massima velocità di propagazione per la particella a (massima fra le coppie che coinvolgono la particella a), $\mathcal{C} = 1$ sta a significare che α decade a α_{min} in ~ 5 lunghezze di smoothing.

Il termine di sorgente \mathcal{S} è scelto in modo che la viscosità aumenti in presenza di un flusso convergente che da luogo ad uno shock [32],

$$S_a = \mathcal{S}^* f_a \max(-\nabla \cdot \mathbf{v}, 0), \quad (2.41)$$

dove \mathcal{S}^* è un parametro libero che viene fissato solitamente $\mathcal{S}^* = 0.7$

I parametri tipicamente usati sono $\alpha_{\min} = 0.01$ e $\alpha_{\max} = 0.8$. Questa implementazione migliora i risultati di alcuni test di cattura degli shock, come il Sod Sez. 3.3.1, facendo sì che la viscosità sia presente in una zona limitata al fronte di shock. Per altri problemi, come i flussi laminari (Sez. 3.3.5), la viscosità artificiale è comunque presente anche dove non si sviluppano shock e sarebbe quindi non necessaria [33, 34]. Le motivazioni che portano alla scelta dei parametri presentati in questa sezione possono essere trovate in [34].

2.2 Il codice GADGET

Fino ad ora è stata presentata quella che può essere definita la formulazione standard dell'SPH. Ora in questa sezione si presenterà una particolare implementazione dell'SPH nel codice GADGET (GALaxies with Dark matter and Gas intERacT) per le simulazioni numeriche cosmologiche, scritto da Volker Springel [30].

Questo codice simula sia la componente non collisionale della materia presente nell'universo, Dark matter e stelle con metodi N-body, sia la parte collisionale, ossia il Gas con il metodo SPH. Inoltre il codice si occupa di gestire l'interazione reciproca di queste componenti.

GADGET è un codice di simulazione massicciamente parallelo ed efficiente pensato per essere eseguito su supercomputer con molte CPU a disposizione. Inoltre esso è pubblico e liberamente usabile nella sua versione GADGET-2, il che lo ha fatto diventare uno dei codici più usati per le simulazioni cosmologiche [39]¹. In questo lavoro di tesi però useremo la versione non pubblica del codice, GADGET-3. Essa differisce dalla sua versione open-source sostanzialmente per l'ottimizzazione migliore del codice che porta a tempi di esecuzione minori.

2.2.1 Equazioni SPH implementate in GADGET

Le equazioni presentate fino ad ora, Eq. (2.18) e Eq. (2.19), differiscono da quelle usate in GADGET per due motivi.

Il primo motivo è che la formulazione SPH usata in GADGET conserva esplicitamente l'entropia, in assenza di processi dissipativi, come proposto da [35]. La conservazione esplicita dell'energia si può imporre definendo una funzione entropica $A(s)$ come

$$P = A(s)\rho^\gamma, \quad (2.42)$$

in cui s è l'entropia specifica; questa relazione implica che

$$u = \frac{A(s)}{1-\gamma}\rho^{\gamma-1}, \quad (2.43)$$

¹<http://www.mpa-garching.mpg.de/gadget/>

in cui u è l'energia interna specifica e γ è l'indice politropico del gas. In questa formulazione quello che viene fatto è di far evolvere $A(s)$ invece che u . Inoltre le equazioni SPH in GADGET tengono conto del fatto che h varia nel tempo e nello spazio, in modo da campionare meglio il campo di densità durante la sua evoluzione. Quindi per quanto riguarda la smoothing length h essa è scelta secondo la formula

$$h_a = \left(\frac{3}{4\pi} N_{\text{sph}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{m_a}{\rho_a} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.44)$$

dove N_{sph} è il numero di vicini entro h .

L'equazione del momento come descritto in [35] sarà

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = - \sum_{b=1}^N m_b \left[f_a \frac{P_a}{\rho_a^2} \nabla_a W_{ab}(h_a) + f_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \nabla_a W_{ab}(h_b) \right], \quad (2.45)$$

dove i coefficienti f_a sono definiti da

$$f_a = \left[1 + \frac{h_a}{3\rho_a} \frac{\partial \rho_a}{\partial h_a} \right]^{-1}, \quad (2.46)$$

con $W_{ab}(h) = W(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|, h)$. Questi termini f_a sono i termini addizionali che si trovano ricavando le formule da un principio variazionale e lasciando che il parametro h possa variare nel tempo.

Se non ci sono shock e non ci sono sorgenti esterne di calore, le equazioni di cui sopra sono completamente reversibili. Inoltre l'entropia A_a di ogni particella rimane costante durante il flusso, per costruzione.

2.2.2 Viscosità artificiale in GADGET

Il gas durante la sua evoluzione, può facilmente creare shock, e in queste discontinuità ha luogo la generazione di entropia. Questi shock idrodinamici vengono trattati introducendo una viscosità artificiale, come già visto nella formulazione generale del SPH. Come già visto in Sez.2.1.6, anche GADGET usa una forza dovuta alla viscosità del tipo:

$$\left. \frac{d\vec{v}_a}{dt} \right|_{\text{visc}} = - \sum_{b=1}^N m_b \Pi_{ab} \nabla_a \bar{W}_{ab}, \quad (2.47)$$

dove $\Pi_{ab} \geq 0$ è non nullo solo se $\vec{r}_{ab} \cdot \vec{v}_{ab} < 0$.

La viscosità genera una variazione dell'entropia secondo

$$\frac{dA_a}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\rho_a^{\gamma-1}} \sum_{b=1}^N m_b \Pi_{ab} \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a \bar{W}_{ab}, \quad (2.48)$$

trasformando l'energia cinetica del moto del gas irreversibilmente in calore. Con il simbolo \bar{W}_{ab} si intende sempre la media aritmetica dei due kernel delle particelle $W_{ab}(h_a)$ e $W_{ab}(h_b)$.

Basandosi sull'analogia con il problema di Riemann fra le discontinuità, in GADGET si usa una versione leggermente diversa dall'Eq 2.34, già vista in precedenza. Definendo v_{ab}^{sig} come la velocità di propagazione del segnale fra le particelle, si usa per v_{ab}^{sig} la formula

$$v_{ab}^{\text{sig}} = c_a + c_b - 3w_{ab}, \quad (2.49)$$

dove c_a e c_b sono le velocità del suono per la particella a e la particella b . Usando l'ansatz:

$$\Pi_{ab} = -\frac{\alpha}{2} w_{ab} v_{ab}^{\text{sig}} / \rho_{ab}, \quad (2.50)$$

dove

$$w_{ab} = \vec{v}_{ab} \cdot \vec{r}_{ab} / |\vec{r}_{ab}|, \quad (2.51)$$

è la proiezione della velocità relativa fra le particelle sul loro vettore di separazione [36]. La viscosità assume la forma:

$$\Pi_{ab} = -\frac{\alpha}{2} \frac{[c_a + c_b - 3w_{ab}] w_{ab}}{\rho_{ab}}, \quad (2.52)$$

che è identica all'equazione 2.34, imponendo che $\beta = 3/2 \alpha$ e sostituendo w_{ab} con μ_{ab} . La differenza maggiore sta nel fattore ulteriore h_{ab}/r_{ab} che μ_{ab} ha in più di w_{ab} .

In GADGET viene inoltre implementato il limitatore di Balsara, come visto nella Sez 2.1.7, in modo da ridurre l'azione della viscosità alla regione interessata dallo shock.

Nelle equazioni del moto quindi la viscosità agisce come una pressione $P_{\text{visc}} \simeq \frac{1}{2} \rho_{ab}^2 \Pi_{ab}$ assegnata alla particella. Per l'Eq. (2.52) quindi

$$P_{\text{visc}} \simeq \frac{\alpha}{2} \gamma \left[\frac{w_{ab}}{c_{ab}} + \frac{3}{2} \left(\frac{w_{ab}}{c_{ab}} \right)^2 \right] P_{\text{therm}}, \quad (2.53)$$

assumendo che le velocità del segnale e le densità siano approssimativamente le stesse per le due particelle.

Questo approccio porta ad avere un termine di pressione che dipende solo da una quantità, simile al numero di Mach, w/c e non dalla lunghezza di smoothing o dalla separazione tra le particelle. In tal modo si limitano accelerazioni molto grandi dovute alla pressione artificiale, permettendo una stabilità numerica migliore ed un'integrazione più efficiente.

2.2.3 Parallelizzazione in GADGET

Dato che la maggior parte delle simulazioni cosmologiche richiedono molto tempo di calcolo per poter essere eseguite, la parallelizzazione è un aspetto molto importante in GADGET come negli altri codici per le simulazioni astrofisiche. Per parallelizzazione si intende la capacità di un codice di essere eseguito su molti processori contemporaneamente. A seconda della capacità del codice di lavorare

parallelamente, il tempo di esecuzione sarà ridotto di un fattore che può essere al massimo il numero di processori usati per eseguire la simulazione.

In GADGET la parallelizzazione viene ottenuta mediante una decomposizione in domini (domain decomposition) del volume della simulazione. Ossia ad ogni processore verrà assegnata una porzione del volume della simulazione e quindi le particelle all'interno di tale volume. Il processore si occuperà di eseguire i calcoli necessari all'evoluzione delle particelle contenute nel proprio dominio. Per la suddivisione e l'assegnazione dei domini ai vari processori si utilizza una Curva di Peano-Hilbert, definita ricorsivamente, che è in grado di riempire lo spazio quanto densamente si vuole. A ogni processore corrisponde una porzione della curva e quindi il volume ad essa associato.

La Figura 2.1 mostra come la curva di Peano viene costruita ricorsivamente. In sostanza ad ogni processore vengono assegnate delle sezioni della curva e quindi una certa frazione del volume totale della simulazione. Il processore si occuperà di svolgere i calcoli richiesti per l'evoluzione delle particelle presenti in quella regione. Oltre a questo ogni processore si occupa di richiedere, agli altri processori, le quantità relative alle particelle delle regioni vicine che interagiscono con quelle della sua regione.

Inoltre in GADGET3 il dominio viene ulteriormente suddiviso in base al suo costo computazionale e spartito fra i processori. Questa operazione viene fatta per cercare di bilanciare il carico di lavoro di ogni processore, ossia le operazioni necessarie per simulare l'evoluzione di tutte le particelle presenti nel dominio. Questo approccio permette di ridurre il tempo in cui il processore è inattivo perchè non ha più operazioni da svolgere sulle particelle che appartengono al suo dominio.

Naturalmente l'effetto collaterale è un aumento delle comunicazioni fra i vari processori inversamente proporzionale al raffinamento della suddivisione in domini. Dato che, per i supercomputer moderni, la comunicazione fra processori è molto veloce, questo aumento nelle comunicazioni incide meno sulla durata della simulazione rispetto alla presenza di processori inattivi.

La suddivisione del dominio viene ripetuta più volte, adattandosi alle caratteristiche della simulazione.

2.2.4 Condizione di Courant e scelta del timestep di integrazione

Numericamente la condizione di Courant si traduce in un limite superiore del timestep utilizzato per l'integrazione numerica delle equazioni differenziali.

In un modello SPH dove la risoluzione del campo discretizzato è rappresentata dalla lunghezza di smoothing h , sarebbe sbagliato integrare su un timestep maggiore di quello che impiega l'informazione, sotto forma di pressione idrodinamica, a propagarsi fra due particelle adiacenti.

Quindi ne risulta una limitazione nel timestep di

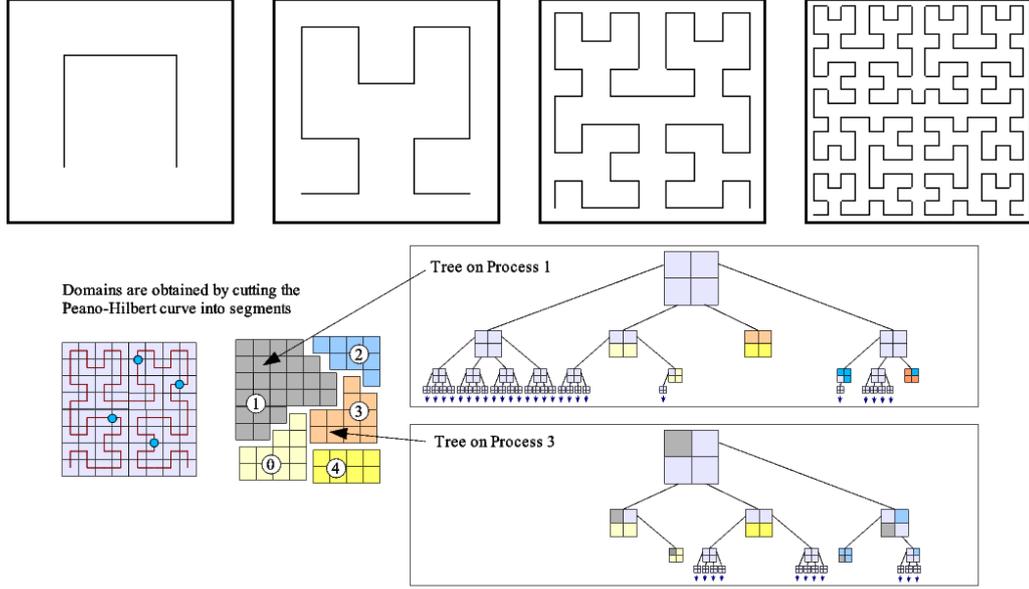


Figura 2.1: Costruzione ricorsiva di una curva di Peano-Hilbert in 2 dimensioni, e suddivisione del dominio per i vari processi

$$\Delta t_a^{(\text{hyd})} = \frac{C_{\text{courant}} h_a}{v_{ab}^{\text{sig}}}, \quad (2.54)$$

dove $C_{\text{courant}} < 1$ è un parametro di controllo per l'accuratezza dell'integrazione, con valore tipico di $C = 0.4$.

Tale condizione in diventa, usando l'Eq. (2.49),

$$\Delta t_a^{(\text{hyd})} = \frac{C_{\text{courant}} h_a}{\max_b (c_a + c_b - 3w_{ab})}, \quad (2.55)$$

dove il massimo è da intendersi su tutti i vicini SPH di a . In GADGET ogni particella viene integrata con un differente timestep a seconda delle condizioni fisiche in cui si trova. Questa variazione nel timestep di integrazione può essere dovuta essenzialmente a due fattori, uno idrodinamico e uno gravitazionale, oltre naturalmente alla condizione di Courant come già trattato.

Idrodinamicamente il timestep individuale delle particelle viene ridotto ulteriormente in presenza degli shock, in modo da simulare meglio le variazioni di stato del gas nelle zone vicine all'onda d'urto. Quindi il criterio di Courant idrodinamico diventa:

$$\Delta t_a^{(\text{hyd})} = \frac{C_{\text{courant}} h_a}{h_a |\nabla \mathbf{v}_a| + \max_b (c_a + c_b - 3w_{ab})(1 + 0.6\alpha_{\text{visc}})}. \quad (2.56)$$

dove il termine $h_a |\nabla \mathbf{v}_a|$ aumenta in presenza di flussi convergenti o divergenti, e il termine $(1 + 0.6\alpha_{visc})$ è diverso da uno solamente in presenza di una viscosità artificiale e quindi un parametro α diverso da zero.

Gravitazionalmente se le particelle di gas subiscono un'accelerazione troppo intensa, si riduce il timestep per limitare l'errore di integrazione. In questo caso il timestep viene scelto come:

$$\Delta t^{grav} = \min \left[\Delta t_{max}, \left(\frac{2\eta\epsilon}{|\mathbf{a}|} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.57)$$

dove η è il parametro che indica l'accuratezza della simulazione; ϵ è la minima distanza a cui le forze gravitazionali vengono calcolate ed è detto *softening*; $|\mathbf{a}|$ è il modulo dell'accelerazione gravitazionale della particella; Δt_{max} è il massimo valore permesso per il timestep delle particelle, indipendentemente dalle condizioni fisiche in cui si trovano. Tale tempo massimo viene deciso prima dell'esecuzione della simulazione dall'utente.

Infine la condizione più stringente sul timestep di integrazione, delle due appena presentate, darà il tempo con cui la particella verrà integrata.

Questo approccio adattivo di integrazione permette che le particelle, non soggette a forti accelerazioni, possano venire integrate su tempi più lunghi in modo da rendere la computazione più efficiente e veloce.

2.2.5 Integrazione numerica in GADGET

L'integrazione numerica in GADGET usa un algoritmo detto di Leapfrog Simplettico, così chiamato perchè velocità e posizione vengono integrati alternativamente. L'integrazione della velocità è:

$$\vec{v} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) = \vec{v} \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) + \vec{a}(t)\Delta t. \quad (2.58)$$

Per integrare la posizione al tempo $t + \Delta t$ abbiamo bisogno della velocità valutata al tempo $t + \frac{\Delta t}{2}$ e quindi:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \vec{v} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right). \quad (2.59)$$

Questo fa sì le posizioni vengano integrate al timestep $t + \Delta t$, mentre le velocità sono sempre calcolate a $t + \frac{\Delta t}{2}$, saltando oltre le posizioni di mezzo timestep (leapfrog appunto).

Se serve una stima delle velocità al tempo in cui integriamo le posizioni si può usare:

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{v} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) + \vec{v} \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right)}{2}. \quad (2.60)$$

Questo tipo di algoritmo di integrazione è formalmente meno accurato di un algoritmo Runge-Kutta di ordine 4, ma a differenza di quest'ultimo conserva esplicitamente l'energia del sistema, per costruzione.

Infatti possiamo vedere in figura 2.2 come cambi l'integrazione di un semplice caso di moto orbitale ellittico, con i due differenti metodi di integrazione.

Vediamo che la deriva orbitale, dopo molte orbite, è di tipo conservativo nel caso del Leapfrog, ossia cambia la posizione del perielio ma resta sempre alla stessa distanza dal corpo centrale. Invece la deriva orbitale è di tipo non conservativo usando l'algoritmo Runge-Kutta 4. Il perielio infatti si avvicina in tal caso al corpo centrale e cambia l'energia totale del sistema.

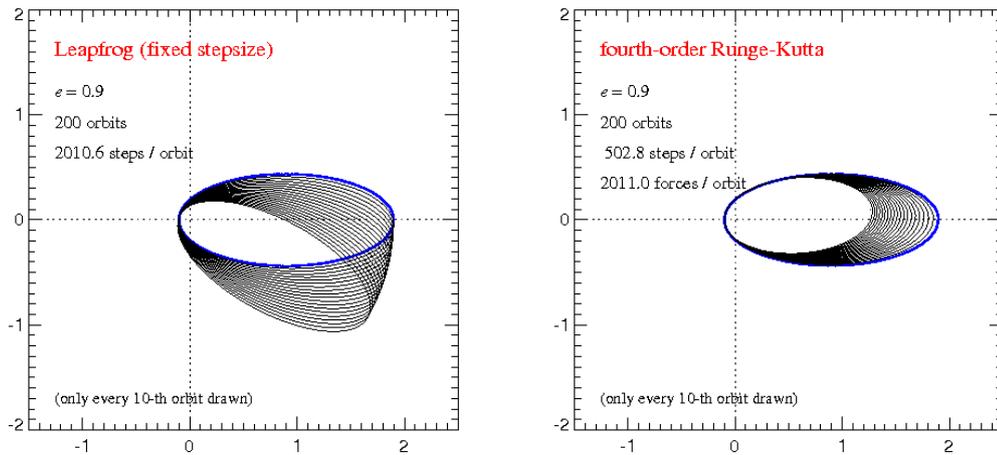


Figura 2.2: Integrazione di un moto orbitale con algoritmo Leapfrog e RK4 da [30]

2.3 Limiti di un approccio SPH

Se da un lato un approccio Lagrangiano all'idrodinamica permette di ottenere una risoluzione adattiva e un accoppiamento gravitazionale più semplice, tramite un algoritmo ad N corpi, con le componenti non collisionali (Dark Matter e Stelle), dall'altro introduce delle limitazioni nella simulazione di alcuni processi fisici.

Il problema principale è che le quantità fisiche sono associate alle particelle SPH e, in quanto tali, non si ridistribuiscono fra particelle vicine. Questo è intrinsecamente diverso da quello che accade nei codici Euleriani che descrivono un flusso di masse ed energia attraverso una griglia.

Quindi quando una particella, per esempio, modifica la sua composizione chimica, questo non si riflette sulle particelle vicine, come succede in un codice Euleriano che tratta lo scambio di metalli fra elementi di fluido.

Inoltre i codici SPH presentano dei problemi nella formazione delle instabilità idrodinamiche, come discusso in [6]. Questo provoca delle notevoli differenze con

i codici Euleriani anche su simulazioni di processi astrofisici come gli ammassi (cluster) di galassie [37],[38].

2.3.1 Tensione superficiale artificiale

Come abbiamo già visto in Sez. 2.1.6 l'introduzione di una viscosità artificiale serve a migliorare la capacità del codice di catturare gli shock. Ci sono dei casi, però, in cui l'introduzione di questa viscosità artificiale (sovrapressione di avvicinamento), provoca degli effetti totalmente non fisici.

In figura 2.3 vediamo come, in una situazione di flusso laminare di gas, due particelle procedano in direzioni parallele, ma con diversa velocità. In questo caso quindi il prodotto scalare $\vec{r}_{ab} \cdot \vec{v}_{ab} < 0$ è negativo anche se le particelle non si stanno in realtà avvicinando.

Per come è modellata la viscosità artificiale queste due particelle avranno un termine di pressione ulteriore, non giustificato da alcun processo fisico, che tenderà ad allontanarle le une dalle altre. Ossia si instaurerà una sorta di tensione superficiale artificiale che tenderà a disporre le particelle su strati ben separati, questo si può vedere in figura 2.4, dove la distanza fra gli starti è esattamente 2 volte la lunghezza di smoothing h . Questo ci fa capire che l'effetto in questione è un effetto numerico piuttosto che fisico.

Tale effetto crea degli allontanamenti fra le particelle che sopprimono la formazione delle instabilità idrodinamiche, limitando di fatto il mescolarsi dei fluidi, sia in densità che in energia.

Inoltre la viscosità artificiale è molto maggiore della viscosità fisica che si avrebbe nel fluido. Questo crea, per esempio, un trasporto artificiale di momento angolare nei dischi di gas in rotazione differenziale.

2.3.2 Il problema del mixing

Una limitazione più profonda dell'SPH sta nella difficoltà di trattare correttamente i gradienti attraverso le discontinuità fra diverse fasi del fluido.

Oltre a tale limitazione nel modello SPH c'è una mancanza intrinseca di diffusione, dato che l'entropia viene conservata per costruzione entro le scale dettate dal kernel [8].

Questi due limitazioni portano a una non corretta simulazione delle instabilità idrodinamiche e a dei problemi nel mixing delle quantità legate alle particelle, come per esempio i metalli prodotti nelle stesse.

Gli effetti dovuti a queste limitazioni del modello SPH sono stati sottolineati da Agertz et al. [6]. In questo articolo vengono messi a confronto diversi test idrodinamici simulati con codici sia Euleriani che Lagrangiani. Le differenze sostanziali fra questi codici stanno nella simulazione delle instabilità idrodinamiche di Kelvin Helmholtz e Rayleigh-Taylor.

Il test di Kelvin Helmholtz rappresenta l'interazione del flusso laminare di due fluidi in equilibrio di pressione, che scorrono con velocità opposte, uno ac-

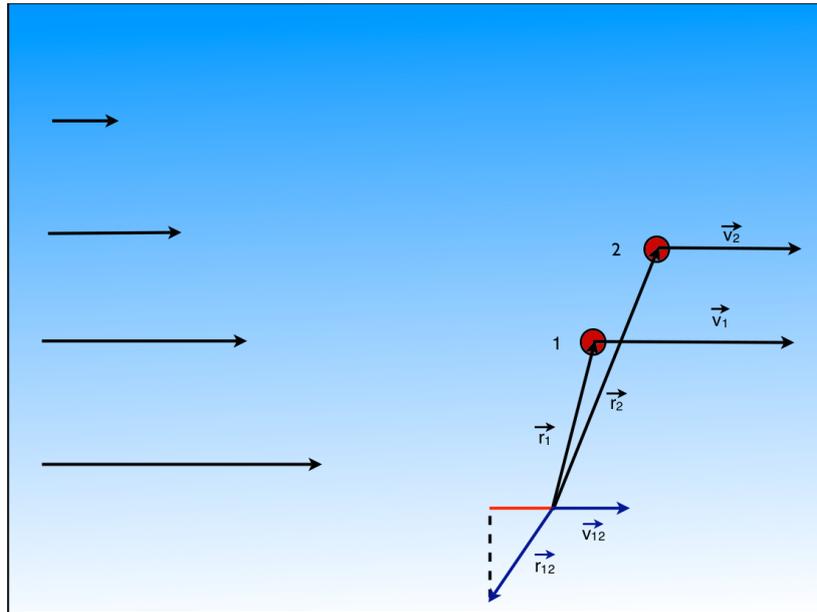


Figura 2.3: Esempio di come nei flussi laminari il prodotto scalare, fra distanza delle particelle e loro velocità relativa, possa diventare negativo anche per particelle non in avvicinamento

canto all'altro. In figura 2.5 viene mostrato il risultato della simulazione del test idrodinamico di Kelvin Helmholtz, presentato in questa tesi in Sez. (3.3.5), con un codice Euleriano e un codice Lagrangiano. Risulta subito chiaro che solo nel codice Euleriano le instabilità di Kelvin Helmholtz si sviluppano.

Dato che questo tipo di instabilità si forma a tutte le lunghezze d'onda, usualmente si perturba il campo di velocità dei due fluidi per imporre la lunghezza d'onda della perturbazione che cresce per prima. Come si vede in figura anche usando tre diverse lunghezze d'onda le instabilità di Kelvin Helmholtz per un codice Lagrangiano non si sviluppano.

Quindi la conclusione a cui si giunge è che la non corretta descrizione delle discontinuità di contatto, in un modello SPH, porta alla soppressione delle instabilità di Kelvin Helmholtz.

Il Santa Barbara test

I problemi appena citati dello schema Lagrangiano SPH nel trattare le instabilità idrodinamiche, producono degli effetti significativi anche nelle simulazioni cosmologiche.

Uno dei test più diffusi per stabilire quali sono le differenze fra i codici di simulazione attualmente in uso è il Santa Barbara Cluster Comparison usato da Frenk et al. nel 1999 e poi diventato test standard [37]. Questo test simula la formazione di un ammasso di galassie a partire da condizioni iniziali primordiali.

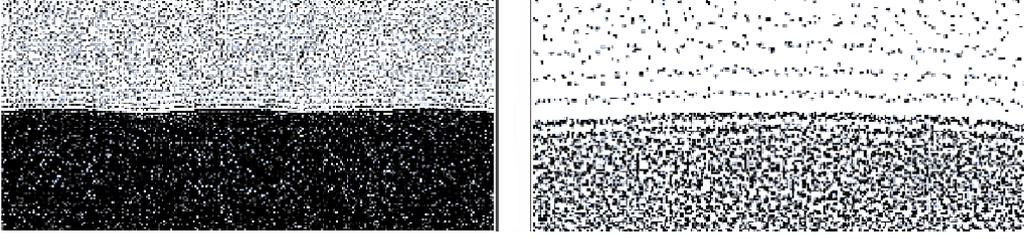


Figura 2.4: Esempio di come per effetto di una tensione superficiale artificiale, in flussi laminari, le particelle SPH tendano a disporsi su layer separati, da [6]

Naturalmente, a differenza dei test idrodinamici, in questo test è presente la gravità.

In questo test viene simulata la formazione di un ammasso di galassie avente massa $M = 10^{15} M_{\odot}$ in un Universo a Cold Dark Matter (CDM) a geometria piatta, con $\Omega_M = 1$. Senza entrare nei dettagli, si tratta di uno scenario cosmologico che oggi sappiamo essere irrealistico, tuttavia è sufficiente a riprodurre un problema astrofisico rilevante, mediante il quale porre a confronto i diversi codici. In figura 2.6 è presentato il profilo radiale di entropia per il Santa Barbara Cluster test usando diversi tipi di codici per le simulazioni cosmologiche. In questo test si vede un comportamento diverso fra codici Euleriani e Lagrangiani soprattutto nei profili di entropia radiali del gas nell'ammasso di galassie. Infatti i codici Euleriani sviluppano un nucleo di gas ad entropia maggiore rispetto a quello dei codici Lagrangiani che, invece, hanno una profilo radiale a legge di potenza e il gas al centro del cluster ha un entropia molto più bassa.

Questo effetto si pensa sia dovuto a una trattazione non corretta della fusione di nubi di gas nei codici SPH. In questi eventi le instabilità idrodinamiche sono fortemente sopresse e non c'è la giusta generazione di entropia e mescolamento in densità dovuto all'instaurarsi della turbolenza [38]. Per verificare questa affermazione è stata simulata separatamente la fusione di due nubi di gas e successivamente si è confrontata l'evoluzione del profilo di entropia dovuta alla fusione. In figura 2.8 è possibile vedere l'andamento della mappa di entropia per una fusione di nubi simulata con un codice Euleriano.

In figura 2.7 è presentato il profilo radiale della funzione entropica $A(s)$, come definita in Eq.(2.42), per la collisione di due nubi di gas sferiche. Anche questo test evidenzia la già citata differenza fra codici Euleriani e codici Lagrangiani nei profili radiali di entropia. Anche in questo caso di semplice fusione di due nubi, per il codice Euleriano si sviluppa un nucleo ad entropia maggiore, mentre per il codice Lagrangiano questo non succede e l'entropia rimane molto bassa al centro. Inoltre sono evidenziate le differenze date dall'uso di una risoluzione maggiore, i quadrati indicano una risoluzione di 256^3 punti griglia o particelle SPH, i triangoli di 512^3 e i cerchi di 1024^3 . Aumentando la risoluzione non si evidenziano cambiamenti significativi nei profili. Tale effetto è quindi non attribuibile alla risoluzione.

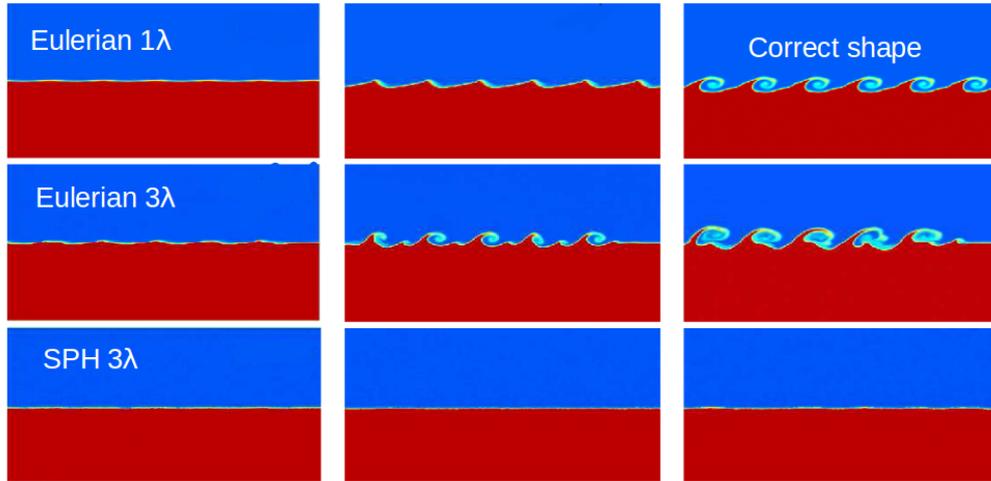


Figura 2.5: Differenze nella simulazione del test di Kelvin Helmholtz (Sez.3.3.5), fra un codice Euleriano e un codice Lagrangiano, da [6]. Le tre colonne si riferiscono a tre diversi tempi: $t = \tau_{KH}/3$, $2\tau_{KH}/3$ e τ_{KH} , τ_{KH} è il tempo tipico in cui si sviluppa l'instabilità di KH a lunghezza d'onda più lunga. Nella prima riga viene mostrata la simulazione del test con il codice Euleriano ENZO, avendo settato nelle condizioni iniziali soltanto la lunghezza d'onda del primo modo a svilupparsi. Nella seconda riga il test viene simulato sempre usando il codice ENZO, ma avendo settato tre lunghezze d'onda diverse. Nella terza riga il test viene simulato avendo settato tre lunghezze d'onda ma usando il codice Lagrangiano GASOLINE.

In figura 2.8 è rappresentata l'evoluzione della mappa di entropia per una sezione passante per il centro delle nubi, simulata usando il codice Euleriano. Si vede che a circa $t = 2Gyr$ quando i nuclei delle due nubi si fondono si crea molta entropia al centro della fusione. Tale entropia generata si diffonde e si ottiene, alla fine dell'evoluzione, un ammasso risultante con un nucleo ad alta entropia.

In figura 2.9 è presentata la mappa proiettata di entropia al momento della fusione delle due nubi di gas. Nel momento della fusione fra due nubi di gas nel codice Euleriano si producono instabilità e c'è un aumento dell'entropia, nel codice Lagrangiano nella fusione le particelle tendono a mantenere la loro entropia senza diffonderla.

In conclusione la mancata simulazione di instabilità idrodinamiche produce degli effetti anche nelle simulazioni astrofisiche cosmologiche.

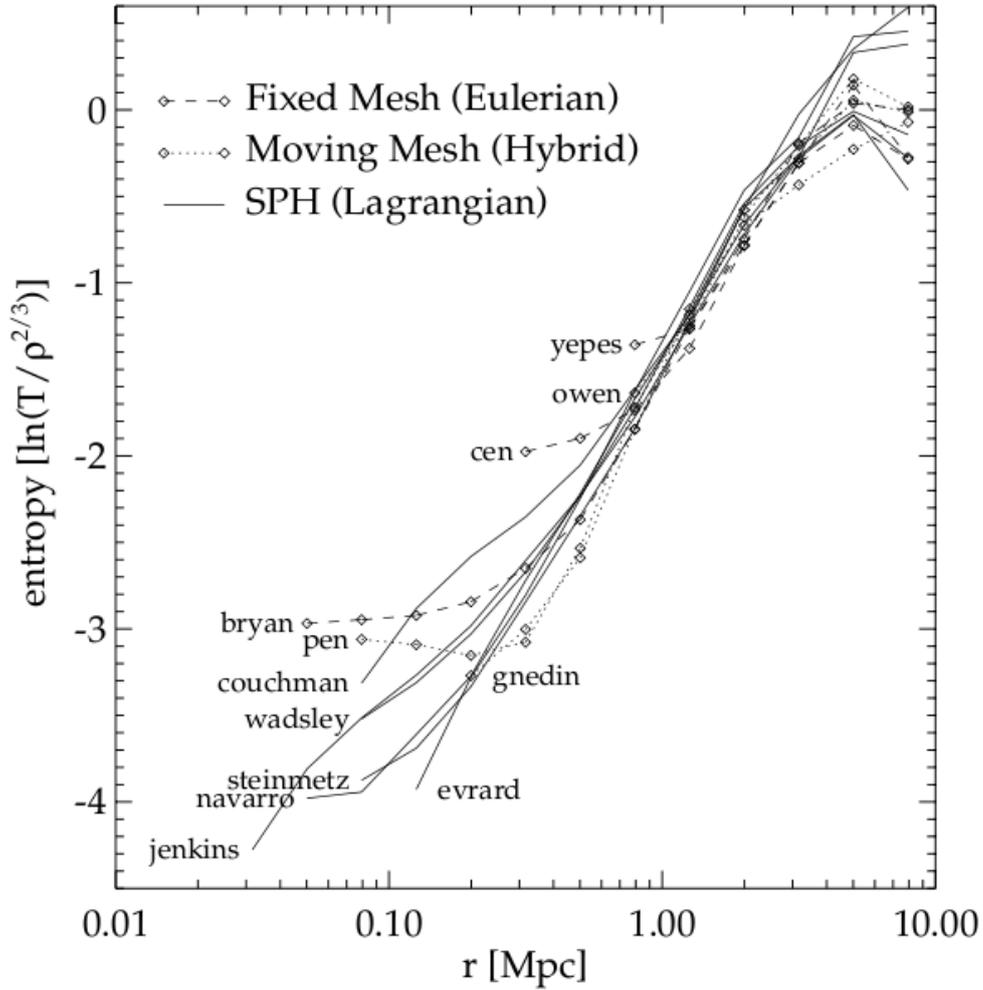


Figura 2.6: Profili radiali di entropia del Santa Barbara Cluster per diversi codici (Euleriani, Lagrangiani e ibridi), per una descrizione dettagliata si veda [37]. Si vede chiaramente che i codici Euleriani mostrano un core nel profilo in prossimità del centro del cluster, con una dimensione determinata dalla risoluzione del codice, da [20]

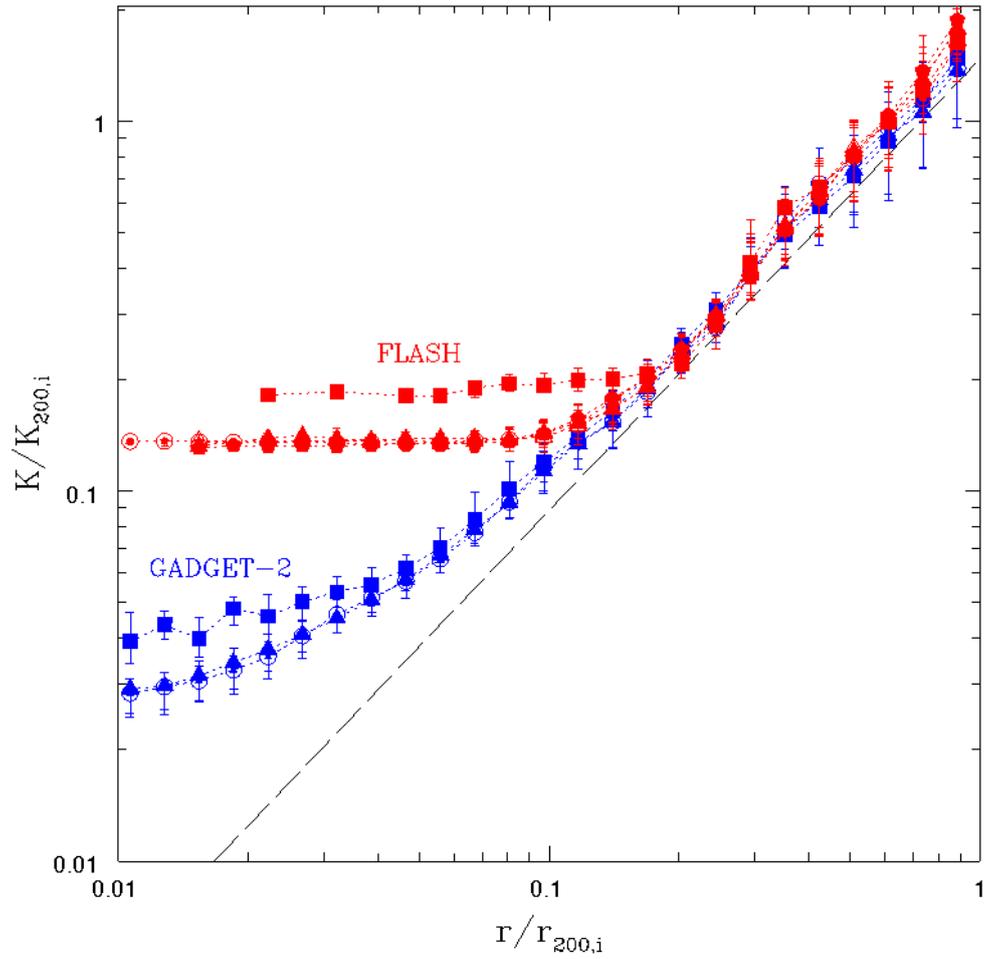


Figura 2.7: Profilo radiale della funzione entropica $A(s)$, come definita in Eq.(2.42), per la collisione di due nubi di gas sferiche. differenza tra un codice Euleriano (FLASH) e un codice Lagrangiano (GADGET-2) alla fine dell'evoluzione del sistema [38].

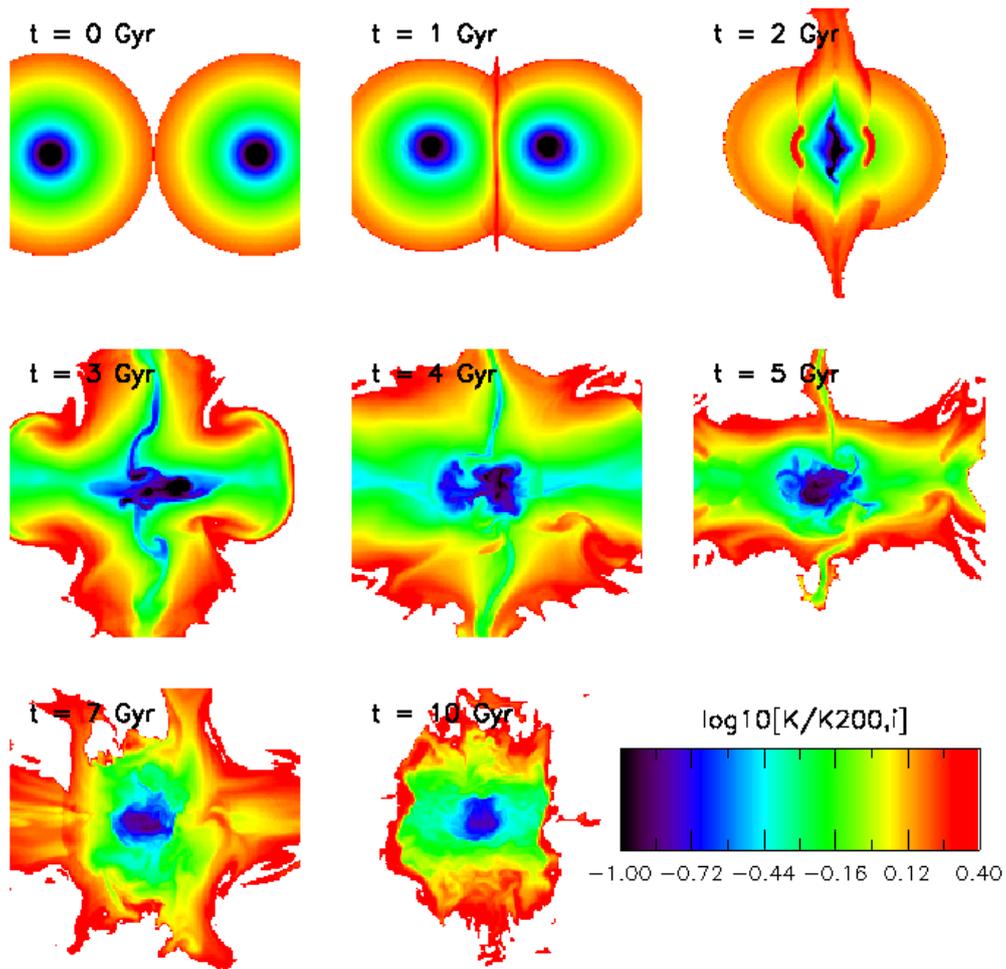


Figura 2.8: Evoluzione della mappa di entropia per una sezione passante per il centro delle nubi, simulata usando il codice Euleriano (FLASH), presentata a diversi tempi [38].

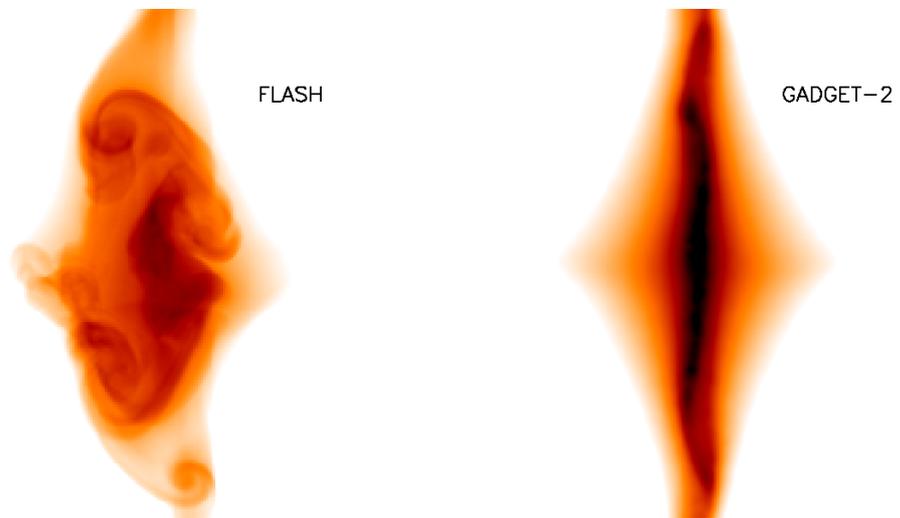


Figura 2.9: Mappa proiettata di entropia al momento della fusione delle due nubi di gas con un codice Euleriano (FLASH) a sinistra e un codice Lagrangiano (GADGET-2) a destra [38]

Capitolo 3

La diffusione termica in SPH

Si è visto nel Capitolo 2 che i modelli SPH proprio a causa della loro natura tendono a sopprimere lo sviluppo delle instabilità idrodinamiche [6]. Il non instaurarsi dell'instabilità impedisce al fluido di mescolarsi correttamente e quindi di diffondere, come conseguenza, l'energia termica e il momento. Questa limitazione, come accennato in Sez. 2.3, è dovuta alla difficoltà dello schema SPH nel trattare le discontinuità fra le diverse fasi di un fluido.

Inoltre l'introduzione di una viscosità artificiale, necessaria al fine di simulare correttamente gli shock idrodinamici, introduce una tensione superficiale artificiale che ha anche l'effetto di sopprimere la crescita delle instabilità.

Quindi il fluido simulato rimane più coeso, non sviluppa instabilità idrodinamiche e presenta una tensione superficiale artificiale.

Sono state presentate diverse possibili soluzioni per migliorare la descrizione delle discontinuità di contatto, che cambiano più o meno profondamente la formulazione SPH per l'idrodinamica.

La domanda a cui si vuole rispondere in questo capitolo è se è possibile migliorare la descrizione numerica delle instabilità idrodinamiche solamente aggiungendo piccole modifiche allo schema SPH, e in caso quanto queste modifiche migliorano lo schema stesso.

Per poter rispondere a questa domanda sono state implementate nel codice GADGET3 le modifiche proposte da Wadsley et al. [20] e Price [11] e le si è messe a confronto con la versione standard del codice.

In questi due lavori si propone di modificare solo le equazioni per l'evoluzione del momento Eq.(2.18) e dell'energia Eq.(2.19) aggiungendo a queste dei termini ulteriori che tengano conto degli effetti dovuti alla formazione di instabilità idrodinamiche.

Tale approccio tenta di risolvere il problema partendo dal suo effetto. La mancata formazione di instabilità non provoca le turbolenze e quindi l'energia non si diffonde. Tale diffusione viene invece forzata aggiungendo un termine alla diffusione dell'energia.

Si è quindi confrontato il comportamento di queste due versioni modificate dello schema SPH con la versione tradizionale. I tre diversi codici sono stati messi alla prova simulando tre test idrodinamici standard: il test di Sod, il test multifase per l'instabilità di Kelvin-Helmholtz e il blob test. Si sono scelti questi test per via del loro ampio uso in letteratura per il confronto di codici diversi, o diverse implementazioni dello stesso codice.

Alla fine del capitolo verranno discusse le conclusioni a cui si è giunti e i futuri sviluppi di questo lavoro di tesi.

3.1 Implementazione di Wadsley

L'instaurarsi della turbolenza a seguito della formazione di instabilità idrodinamiche ha come effetto un'efficace diffusione dell'energia e del momento. Quindi l'assenza di un corretto modello sull'instaurarsi delle turbolenze può in alcuni casi permettere che la diffusione dell'energia sia dominata da effetti puramente numerici e quindi portare a una non corretta simulazione dell'evento fisico.

Nel lavoro di Wadsley et al. si propone di aggiungere un termine alla diffusione dell'energia termica che riproduca l'effetto di mixing dovuto alla turbolenza, sostanzialmente un modello sottorisoluzione per il trasporto di energia termica [20].

La correzione proposta consiste in un termine aggiuntivo nell'equazione della variazione dell'energia. Questo termine ulteriore è formalmente identico a un termine di conduzione termica [29]. Per la diffusione termica si risolve l'equazione differenziale per il trasporto del calore in assenza di sorgenti o dissipazione:

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (3.1)$$

quindi tradotto in formulazione SPH diventa:

$$\frac{dT_i}{dt} = - \sum_j m_j K_{ij} (T_i - T_j) \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} \cdot \nabla_i W_{ij}, \quad (3.2)$$

$$K_{ij} = \frac{1}{c_{p,i} \rho_i \rho_j} \frac{4\kappa_i \kappa_j}{(\kappa_i + \kappa_j)}. \quad (3.3)$$

Il termine proposto da Wadsley ha la forma:

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{diss} = - \sum_j m_j Q_{ij} (u_i - u_j) \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2} \cdot \nabla_i W_{ij}, \quad (3.4)$$

$$Q_{ij} = C \frac{(h_i + h_j) |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i|}{\rho_i + \rho_j}. \quad (3.5)$$

Come si può notare le due equazioni sono formalmente identiche a meno dei coefficienti K_{ij} e Q_{ij} . Il coefficiente K_{ij} , che è sostanzialmente il coefficiente di diffusione termica, viene tradotto nella formulazione di Wadsley in un termine che

dipende dalla magnitudine della velocità relativa e dalla lunghezza di smoothing h . Il coefficiente Q_{ij} è quindi sempre diffusivo e ne risulta sempre un aumento di entropia, come ci si aspetta in un processo diffusivo. Infine il parametro C è un parametro libero del modello il cui valore dipende dal problema che si vuole trattare. Esso viene scelto a seconda di quale effetto fisico si vuole riprodurre. Nel lavoro di Wadsley et al., è stato scelto un coefficiente $C = 0.1$ in modo da ottenere risultati più simili a quelli ottenuti con codici Euleriani.

Bisogna considerare comunque che il modello non è autoconsistente perchè non modifica l'equazione del momento, come ci si aspetterebbe in un processo di turbolenza, ma solo quella dell'energia. L'intenzione di Wadsley et al. è quella di mostrare che un modello sottorisoluzione per gli effetti della turbolenza, e più in generale delle instabilità idrodinamiche risulta necessario per migliorare la capacità del codice di simulare le discontinuità del gas.

D'altra parte questa correzione nella diffusione dell'energia serve soltanto a indicare una possibile direzione per migliorare la simulazione degli effetti dovuti all'instaurarsi della turbolenza. Invece un approccio più raffinato, anche se nello stesso spirito, è rappresentato dalla correzione di Price alla diffusione dell'energia, che vedremo nella prossima sezione.

3.2 Implementazione di Price

L'approccio di Price, è più sofisticato rispetto al precedente, ed elimina quella dipendenza dal problema trattato che invece era presente nella formulazione di Wadsley, a causa della presenza del parametro libero C . Price nel suo articolo [11] propone un termine aggiuntivo all'equazione della variazione dell'energia interna, come già proposto da Wadsley et al, ma in aggiunta suggerisce l'uso di una forma alternativa di viscosità artificiale dipendente dal tempo e diversa per ogni particella [32, 34].

Il termine aggiuntivo simula l'effetto di una diffusione termica e per formulare questo termine Price riprende una trattazione presentata da Monaghan nel 1997 [36]. In tale articolo si modificano le equazioni per energia interna e momento dello schema SPH, usando dei termini correttivi ispirati alla soluzione del problema di Riemann fra particelle vicine.

In assenza di termini dissipativi le equazioni SPH per il momento e per l'energia hanno la forma già presentata nel capitolo precedente in Eq. (2.18) e in Eq. (2.22). Come si è visto la viscosità artificiale corrisponde a un termine dissipativo sia nell'equazione del momento sia nell'equazione dell'energia, ottenendo la formulazione di Eq. (2.35) e Eq. (2.36). Nell'articolo di Monaghan vengono introdotti dei termini dissipativi per energia e momento la cui forma viene ispirata dalla soluzione del problema di Riemann fra particelle vicine. L'equazione per il momento diventa

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + \Omega_{ij}^v \right) \nabla_a W_{ij}, \quad (3.6)$$

mentre l'equazione per l'energia diventa

$$\frac{de_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{P_i \vec{v}_j}{\rho_i^2} + \frac{P_j \vec{v}_i}{\rho_j^2} + \Omega_{ij}^e \right) \cdot \nabla_a W_{ij}. \quad (3.7)$$

Il problema di Riemann nasce dal fatto che possa esserci una discontinuità nelle proprietà termodinamiche fra particelle vicine. Monaghan propone di tenere conto di questa discontinuità quando si svolgono le sommatorie SPH nell'equazione del momento Eq. (2.35) e dell'energia interna Eq. (2.36). La soluzione del problema di Riemann associata a questo caso è

$$\Omega_{ij}^v \propto v_{sig}(i, j) \mathbf{v}_{ij} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} \quad (3.8)$$

dove $v_{sig}(i, j)$ è la velocità del segnale fra la particella i e la particella j , dove il segnale è rappresentato dalla propagazione dell'onda di pressione; $v_{ij} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}$ è la differenza vettoriale fra le velocità delle particelle proiettata sul vettore di separazione.

Dato che le differenze in velocità sono importanti solo durante gli shock, questo termine viene ulteriormente pesato con un termine di viscosità artificiale, moltiplicandolo per il coefficiente che rappresenta la viscosità artificiale α :

$$\Omega_{ij}^v = \alpha v_{sig}(i, j) \mathbf{v}_{ij} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} \quad (3.9)$$

Per quanto riguarda l'energia interna si usa la stessa soluzione trovata per il problema di Riemann e quindi

$$\Omega_{ij}^e \propto v_{sig}(i, j) (e_i - e_j) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} \quad (3.10)$$

Diversamente da Monaghan, Price propone di usare 2 diverse velocità del segnale per la correzione del momento e dell'energia. Inoltre propone di pesare Ω_{ij}^e con il coefficiente α_u , invece che con α , dove α_u è un parametro la cui evoluzione è simile a quella di α , ma non è legato alla viscosità artificiale. Esso, infatti, rappresenta la velocità del segnale per la diffusione termica. Come vedremo questo permette di localizzare la correzione solo là dove ci sono forti gradienti di pressione.

Quindi le formule usate da Price per costruire i termini dissipativi aggiuntivi per l'equazioni del momento e dell'energia sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)_{diss} &= \sum_j m_j \frac{\Omega_{ij}^v}{\bar{\rho}_{ij}} \nabla_i W_{ij} \\ &= \sum_j m_j \frac{\alpha v_{sig}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} \nabla_i W_{ij}, \\ \left(\frac{de_i}{dt} \right)_{diss} &= \sum_j m_j \frac{\Omega_{ij}^e}{\bar{\rho}_{ij}} \nabla_i W_{ij} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$= \sum_j m_j \frac{(e_i^* - e_j^*)}{\bar{\rho}_{ij}} \hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \overline{\nabla_i W_{ij}}, \quad (3.12)$$

con

$$\overline{\nabla W_{ij}} = \frac{1}{2} [\nabla W_{ij}(h_i) + \nabla W_{ij}(h_j)], \quad (3.13)$$

e $e_i^* = \frac{1}{2} \alpha v_{sig} (\mathbf{v}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})^2 + \alpha_u v_{sig}^u u_i$ la proiezione dell'energia interna lungo la congiungente delle particelle.

Sapendo che l'energia termocinetica specifica e definita come $e = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + u$, si può trovare la relazione fra la variazione di e e la variazione dell'energia termica specifica u :

$$\frac{du}{dt} = \frac{de}{dt} - \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (3.14)$$

sostituendo Eq. (3.11) e Eq. (3.12) in questa equazione otteniamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dt} \right)_{diss} &= - \sum_j \frac{m_j}{\bar{\rho}_{ij}} \left\{ \frac{1}{2} \alpha v_{sig} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})^2 \right. \\ &\quad \left. + \alpha_u v_{sig}^u (u_i - u_j) \right\} \hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Per la velocità del segnale si usa la seguente formula

$$v_{sig} = \frac{1}{2} [c_i + c_j - \beta \mathbf{v}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij}], \quad (3.16)$$

dove $\beta = 2$ come suggerito da Price.

Il termine di velocità del segnale per la diffusione termica è definito come:

$$v_{sig}^u = \sqrt{\frac{|P_i - P_j|}{\bar{\rho}_{ij}}}, \quad (3.17)$$

questa definizione fa sì che questa velocità di propagazione sia diversa da zero solo in presenza di differenze di pressione. Quindi perchè il termine v_{sig}^u sia diverso da zero deve esserci una differenza in entropia e quindi in pressione, ed inoltre, come vedremo, quando si è in porzioni di fluido dove il laplaciano dell'energia normalizzato è diverso da zero. Quindi tale velocità sarà non nulla, producendo diffusione termica soltanto in regioni molto limitate attorno alle discontinuità di contatto.

3.2.1 Viscosità artificiale proposta da Price

Price nel suo lavoro propone di usare una viscosità artificiale dipendente dal tempo, che è stata già trattata in Sez.2.1.7, ma usando dei parametri diversi e senza far uso del Balsara-switch, trattato in Sez. 2.1.7. In questa sezione verranno presentate le equazioni che regolano l'evoluzione di α e di α_u , per la

diffusione termica proposta da Price, con i relativi parametri. L'equazione che regola l'evoluzione di α è:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\alpha_i - \alpha_{min}}{\tau_i} + \mathcal{S}_i, \quad (3.18)$$

Quindi in assenza di un termine di sorgente \mathcal{S} , α decade a α_{min} su una scala di tempo di τ , dove τ è calcolata come

$$\tau_i = \frac{h_i}{\mathcal{C}v_{sig}}. \quad (3.19)$$

In tale equazione v_{sig} è la massima velocità di propagazione per la particella i (massima fra le coppie che coinvolgono la particella i), $\mathcal{C} = 0.1$ sta a significare che α decade a α_{min} in ~ 5 lunghezze di smoothing. Price fissa $\alpha_{max} = 1$ durante l'evoluzione. Nelle Eq. (3.11) e Eq. (3.15) $\alpha = 0.5(\alpha_i + \alpha_j)$ per mantenere la simmetria.

Il termine di sorgente \mathcal{S} è scelto in modo tale che la viscosità aumenti in presenza dello shock [32],

$$\mathcal{S} = \max(-\nabla \cdot \mathbf{v}, 0). \quad (3.20)$$

L'evoluzione del termine α_u , per la diffusione termica, è analoga a quella per α e quindi l'equazione di evoluzione diventa:

$$\frac{d\alpha_i^u}{dt} = -\frac{\alpha_i^u}{\tau_i} + \mathcal{S}_i^u, \quad (3.21)$$

con la differenza che α^u non è limitato superiormente e il suo valore minimo è $\alpha_{min}^u = 0$. Il termine di sorgente è invece differente perchè coinvolge il laplaciano dell'energia

$$\mathcal{S}_i^u = \frac{h_i |\nabla^2 u|_i}{\sqrt{u_i + \epsilon}}, \quad (3.22)$$

dove ϵ è un numero piccolo che dovrebbe prevenire eventuali divergenze nel termine di sorgente, nella nostra implementazione si è scelto di usare $\epsilon = 0.01 u$, da notare che τ è lo stesso in entrambe le formule in Eq. (3.18) e Eq. (3.21). Il Laplaciano dell'energia è stato calcolato con la formula:

$$(\nabla^2 A)_i = 2 \sum_j m_j \frac{(A_i - A_j) w_{ij}}{\rho_j |r_{ij}|}, \quad (3.23)$$

dove A rappresenta il generico campo scalare e w_{ij} è legato al kernel da $\vec{\nabla} W_{ij} = \hat{e}_{ij} w_{ij}$

3.3 Risultati

In questa sezione andremo a verificare come le migliorie apportate al codice ne modificano il comportamento nella simulazione di alcuni test idrodinamici standard.

Questi test sono pensati in modo da isolare soltanto gli effetti fisici desiderati come la cattura di shock e la formazione di instabilità idrodinamiche, e quindi poter stabilire più efficacemente come le modifiche apportate hanno influito sulla capacità del codice di riprodurre questi effetti.

L'utilità di questi test risiede anche nel fatto che di essi si conosce o la soluzione analitica oppure i tempi caratteristici che regolano i processi fisici in gioco.

Tutti i test sono pensati per essere usati con diversi codici di simulazione, in modo da poter facilmente confrontare i risultati. Per quanto riguarda il test multifase di Kelvin-Helmholtz e il bob test, le condizioni iniziali possono essere trovate sul sito [Astrosim.net](http://www.astrosim.net)¹.

Tutte le simulazioni sono presentate in unità del codice ossia per le masse espresse in unità di $10^{10}M_{\odot}$, le velocità in $km\ s^{-1}$, il tempo in $0.977Gyr$, le lunghezze in kpc e quindi le densità in $\frac{10^{10}M_{\odot}}{kpc^3}$.

Infine, tutte le simulazioni hanno condizioni al contorno periodiche, in tal modo si è in grado di simulare un fluido spazialmente infinito ed evitare effetti dovuti al bordo.

3.3.1 Sod shock tube

Il primo test che andremo a usare è lo shock test unidimensionale di Sod. Esso è un test semplice di cui si conosce la soluzione analitica per la pressione, la densità di energia, la velocità e la densità[25].

Il Sod shock test è un problema di Riemann e permette di verificare come il codice si comporta nella cattura degli shock, nella descrizione delle discontinuità e nella propagazione di un fronte di rarefazione.

Si tratta di un tubo con due fluidi, la cui lunghezza è molto superiore alle altre 2 dimensioni, esso è, infatti, pensato come test unidimensionale.

Nelle condizioni iniziali il tubo è diviso in 2 parti, una con un fluido ad alta densità e pressione e una con lo stesso fluido ma a bassa densità e pressione. Quindi nel centro del tubo è presente una discontinuità in pressione e densità, come è possibile vedere in figura 3.1. Evolvendo, il sistema crea un'onda d'urto che si propaga verso destra nella zona a bassa densità e un'onda di rarefazione che si propaga verso sinistra nella zona ad alta densità. La soluzione analitica, come già detto, è nota ed è quella che si vede in figura 3.2 [18].

Condizioni iniziali del Sod test

Le condizioni iniziali di questo test sono le stesse usate da Springel per testare lo schema SPH di GADGET-2 [30]. Il tubo è pieno di un gas ideale inizialmente in quiete con indice politropico, in Eq. (2.42), $\gamma = 1.4$. Nella prima metà del tubo il gas ha pressione $P_1 = 1$ e densità $\rho_1 = 1$, in unità del codice, e nella seconda parte il gas ha pressione $P_2 = 0.1795$ e densità $\rho_2 = 0.25$. Come già detto il test è pensato essere unidimensionale quindi le dimensioni vengono scelte essere pari a

¹<http://www.astrosim.net/code/doku.php?id=home:codetest:hydrotest:multiphase>

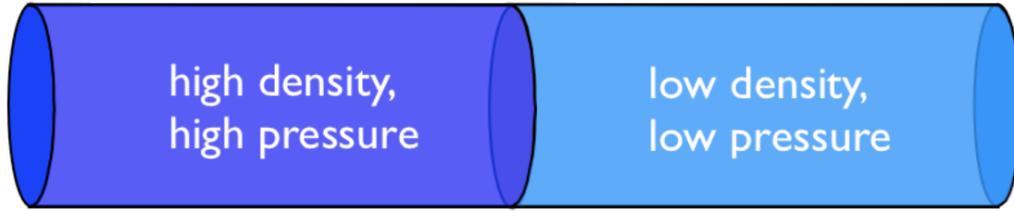


Figura 3.1: Rappresentazione visiva del Sod test

$(L_x, L_y, L_z) = (60, 1, 1)$. Il numero totale di punti interpolanti, e quindi particelle SPH usate è 75000, e il numero di vicini usati per il calcolo della lunghezza di smoothing è 100.

Soluzione attesa per il Sod test

Come abbiamo già detto questo test rappresenta un problema di Riemann, andiamo ora ad analizzare la soluzione attesa visibile in figura 3.2. All'istante iniziale i due fluidi sono separati da una membrana ideale posizionata nel centro del tubo. Questa zona è detta discontinuità di contatto (CD), ora lasciando evolvere il sistema per un certo tempo notiamo che il sistema è rappresentato da 5 zone con differenti proprietà.

1. **Zone L e R:** sono le zone lontane dalla discontinuità di contatto dove il segnale, rappresentato dall'onda di pressione, non ha avuto tempo di propagarsi. Queste due zone rimangono quindi imperturbate e conservano le proprietà fisiche che avevano all'istante iniziale.
2. **Zona di rarefazione:** in questa zona è presente un'onda di rarefazione che presenta al suo interno una zona di testa (*rarefaction fan head* RFH) e una zona di coda (*rarefaction fan tail* RFT), essa si muove verso sinistra alla velocità del suono.
3. **Zona intermedia:** in questa zona è presente il fluido inizialmente ad alta densità che si è spostato verso destra, questa zona è delimitata dalla coda dell'onda di rarefazione e dalla discontinuità di contatto. In questa zona la velocità del fluido è costante.
4. **Zona di shock:** in questa zona è presente il fluido che ha subito lo shock, esso è delimitato dalla discontinuità di contatto e dal fronte d'onda dello shock (*shock front* SF). In questa zona la pressione è la stessa della zona precedente $P_{ZS} = P_{ZI}$, mentre è diversa la densità.

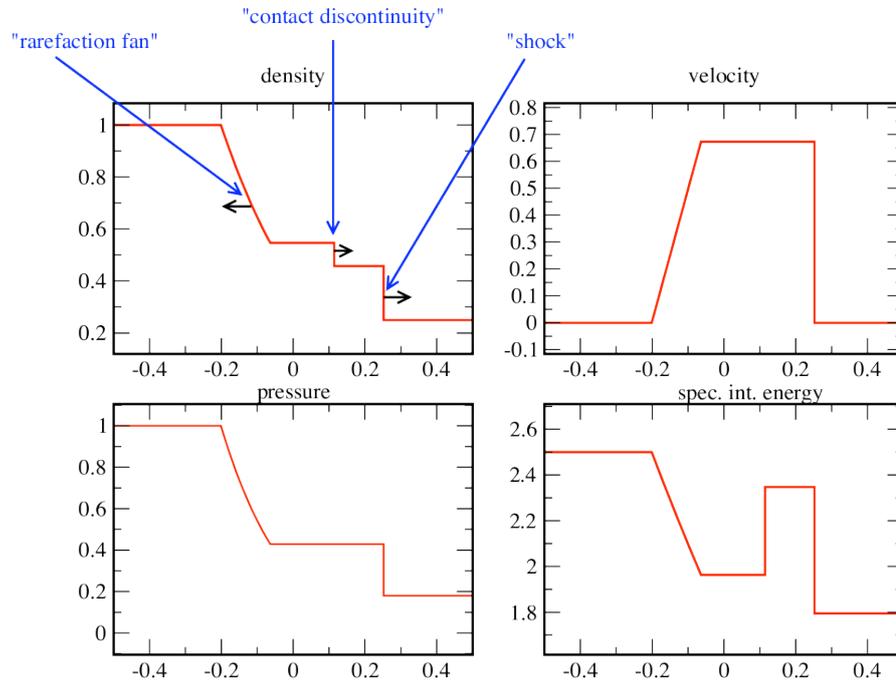


Figura 3.2: Soluzione analitica del Sod test.

3.3.2 Sod: Versione tradizionale dello schema SPH

Nei tre grafici principali in figura 3.4, vengono mostrate le variazioni della pressione, della velocità e della densità in funzione della posizione all'interno del tubo; mentre nei pannelli più piccoli vengono mostrati, per ogni grafico, i particolari della zona di rarefazione, della zona di discontinuità di contatto e della zona di shock. Le quantità rappresentate sono da riferirsi al tempo del codice $t = 5$. Il test è stato eseguito usando la formulazione SPH tradizionale, ossia quella che conserva esplicitamente l'energia. I punti rossi rappresentano la soluzione numerica, mentre la linea blu rappresenta la soluzione analitica.

Come prima cosa notiamo che in tutte le zone in cui sono presenti forti variazioni delle quantità fisiche sono presenti delle discrepanze fra la media della soluzione numerica e la soluzione analitica. In figura si mostrano la zona di rarefazione, la zona della discontinuità di contatto e la zona di shock per poter meglio apprezzare le differenze fra la soluzione analitica e quella numerica.

Si vede che la discrepanza maggiore con la soluzione analitica sta nella posizione in cui si trova la discontinuità di contatto fra i due fluidi diversi. In questa zona all'istante iniziale è presente una discontinuità sia in pressione che in densità. Durante l'evoluzione questa discontinuità in pressione dovrebbe spostarsi,

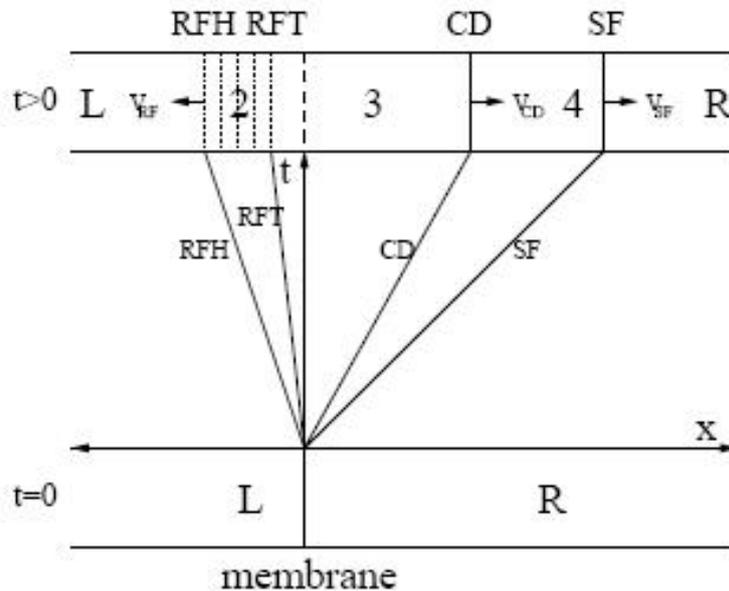


Figura 3.3: Rappresentazione schematica delle zone in cui evolve il problema di Riemann rappresentato dal Sod shock tube. In basso troviamo il sistema nel suo stato imperturbato dove è visibile solamente la discontinuità di contatto. In alto viene mostrato il sistema dopo un certo tempo. Da sinistra a destra si trovano la testa dell'onda di rarefazione (*rarefaction fan head* RFH). La coda dell'onda di rarefazione (*rarefaction fan tail* RFT). La discontinuità di contatto (*contact discontinuity* CD). Infine si trova il fronte d'onda dello shock (*shock front* SF)

alla velocità del suono nel mezzo verso destra come onda di shock e verso sinistra come onda di rarefazione. Quindi il fluido nella zona centrale dovrebbe essere omogeneo in pressione. Quello che accade invece è che per la pressione permane un artefatto nella zona di discontinuità di contatto. Tale *blip*, o artefatto, in pressione è dovuto alla difficoltà dello schema SPH di trattare i gradienti fra diverse fasi del fluido.

Anche nelle zone dove non c'è nessun gradiente nelle quantità fisiche notiamo che la soluzione numerica risulta affetta da rumore. In media, infatti, la soluzione numerica riproduce quella analitica, ma specialmente per quanto riguarda la velocità ci sono zone dove il rumore è notevole.

Sod: Versione tradizionale dello schema SPH senza viscosità artificiale

In figura 3.5 viene rappresentato l'andamento in pressione, velocità e densità, eseguendo il test con la formulazione SPH tradizionale ma senza usare una viscosità artificiale. Come si può notare il fronte di shock non viene simulato

correttamente. Questo accade perchè le particelle dei due fluidi durante lo shock si compenetrano molto più del dovuto e non c'è nessun meccanismo che converta l'energia cinetica dello shock in energia termica. Quindi le particelle interessate dal fronte di shock avranno velocità molto superiori a quelle attese, come è possibile apprezzare nel grafico che mostra l'andamento delle velocità simulate rispetto a quelle della soluzione analitica. Si vede che più ci si avvicina al fronte di shock, maggiore è la differenza fra la velocità attesa e quella numerica.

Risulta difficile stabilire, a causa dell'elevato rumore, se nella zona della discontinuità di contatto sia presente il blip in pressione. Da questo test si evince che l'introduzione di una viscosità artificiale risulta necessaria al fine di simulare correttamente l'evoluzione del problema di Riemann e la propagazione di un'onda di shock.

Sod: Versione tradizionale dello schema SPH con viscosità artificiale dipendente dal tempo

In figura 3.6 viene rappresentato l'andamento in pressione, velocità e densità, eseguendo il test con la formulazione SPH tradizionale ed inoltre una viscosità artificiale dipendente dal tempo come presentata nella Sez. 2.1.7. Per questo tipo di viscosità artificiale si può decidere se il valore iniziale del parametro α sia il valore minimo o massimo permesso durante l'evoluzione. Scegliendo di partire dal valore massimo della viscosità artificiale si ottengono risultati analoghi alla viscosità standard. Quello che si presenta in figura 3.6 invece è il test simulato con la viscosità artificiale che parte da un valore minimo $\alpha_{init} = \alpha_{min} = 0.01$. Si vede che il comportamento del codice è lievemente migliore della versione senza viscosità artificiale. Possiamo vedere infatti che la dispersione delle particelle diminuisce pur restando elevata rispetto al caso con viscosità standard.

Risulta importante notare che nel grafico che rappresenta la pressione nella discontinuità di contatto è comunque presente l'artefatto in pressione, la cui intensità e forma non risultano cambiate. Tale considerazione rafforza l'idea che tale artefatto fosse presente anche nella simulazione senza viscosità artificiale, anche se difficilmente visibile a causa dell'elevato rumore. Tale risultato ci porta a concludere che tale artefatto non è associabile ad una viscosità artificiale ma piuttosto alla difficoltà dello schema SPH a trattare le discontinuità fra diverse fasi del fluido.

3.3.3 Sod: Diffusione termica di Wadsley

Eseguito il test usando la formulazione di Wadsley notiamo che non ci sono differenze significative con i risultati per versione tradizionale dello schema SPH. In

figura 3.7 si mostra l'andamento del blip in pressione nella zona della discontinuità di contatto. Nel primo grafico in alto è mostrato l'andamento per la versione Traditional SPH mentre nella seconda riga vengono mostrati gli andamenti per quanto riguarda la formulazione di Wadsley con tre diversi coefficienti $C = 0.05$, $C = 0.1$, $C = 0.5$. Si vede che non c'è una differenza significativa con la versione Traditional SPH. Infatti anche aumentando il coefficiente di diffusione C non migliora la capacità della simulazione di evitare il blip in pressione nella zona di interfaccia fra i due fluidi. Questo è dovuto al fatto che il blip in pressione non è legato alla mancanza di diffusione termica ma bensì al già citato problema dello schema SPH nel trattare le discontinuità. Pertanto introducendo una diffusione termica non ci si aspetta che questo artefatto venga corretto. In figura 3.8 viene presentato il confronto diretto fra il blip in pressione con i tre diversi coefficienti. Quello che si vede è che aumentando il coefficiente di diffusione l'intensità del blip non si riduce, ed esso viene invece allargato, ossia la pressione è maggiore in una zona più ampia. Tale fatto può essere dovuto ad un aumento nella diffusività a causa di un coefficiente di diffusione maggiore. Questo test non è stato presentato nel lavoro di Wadsley [20].

3.3.4 Sod: Diffusione termica di Price

In figura 3.9 viene mostrato l'andamento in pressione, velocità e densità, con la versione del codice che implementa la diffusione termica di Price e una viscosità dipendente dal tempo come presentata in Sez. 3.2.1.

Come prima cosa si vede che l'andamento in pressione non presenta il blip presente sia per la versione Traditional SPH che per la versione di Wadsley. Inoltre dal confronto con figura 3.4 si nota come in generale la soluzione numerica sia affetta da un rumore lievemente minore rispetto alla versione tradizionale. Tale effetto è maggiormente visibile nell'andamento della velocità dove, soprattutto nella zona vicina allo shock, la dispersione di velocità è minore rispetto alle altre versioni del codice. Questo miglioramento è dovuto al termine dissipativo aggiuntivo presente nell'equazione del momento Eq. (3.11). Si nota inoltre che nelle zone del fronte di shock e della discontinuità di contatto la soluzione numerica risulta più smussata e non presenta le tipiche oscillazioni nella regione di shock presenti nella versione tradizionale. Tale effetto è influenzato maggiormente dal tipo di viscosità artificiale usata. Questo si può capire andando ad analizzare la figura (3.10) dove viene presentato l'andamento della pressione e della densità nella zona di shock e nella zona della discontinuità di contatto con due diverse formulazioni della viscosità artificiale. Nella colonna di sinistra viene presentato il risultato ottenuto usando una viscosità artificiale dipendente dal tempo come proposta da Price e discussa in Sez. 3.2.1. Mentre nella colonna di destra alla diffusione termica di Price viene associata una viscosità artificiale dipendente dal

tempo come discussa in Sez. 2.1.7 partendo dal valore massimo per il parametro $\alpha_{init} = \alpha_{max} = 0.8$. Quindi si vede che la mancanza delle oscillazioni nelle zone di discontinuità è dovuta alla versione di viscosità artificiale dipendente dal tempo usata. Si può notare però che la versione di viscosità usata non modifica il comportamento del codice nella simulazione dell'andamento della pressione nella zona della discontinuità di contatto.

In figura 3.11 viene mostrato l'andamento della pressione, in particolare nella zona della discontinuità di contatto. In colore verde viene graficato l'andamento della pressione per la correzione di Price e in colore rosso per la versione Traditional SPH. Usando la correzione di Price l'artefatto in pressione scompare quasi del tutto. Tale comportamento è dovuto al fatto che il termine dissipativo presente in Eq. (3.11) e in Eq. (3.15), pur simulando una diffusione termica, ha una formulazione ispirata dalla soluzione del problema di Riemann fra particelle vicine. Quindi una formulazione di questo tipo tende a ridurre i problemi dello schema SPH nel trattamento delle discontinuità.

Diffusione termica di Price con viscosità artificiale dipendente dal tempo

È interessante notare come viene simulato il test di Sod usando la diffusione termica di Price e una viscosità artificiale dipendente dal tempo come presentata in Sez. 2.1.7 ma partendo dal valore minimo per il parametro $\alpha_{init} = \alpha_{min} = 0.01$. In figura 3.12 viene mostrato l'andamento in pressione, velocità e densità. Si nota che usando la diffusione termica di Price, rispetto alla versione che n'è priva, con questo schema di viscosità artificiale il rumore diminuisce notevolmente ed aumenta anche la capacità del codice di catturare lo shock. Quindi si è portati a concludere che la diffusione termica proposta da Price agisce anche nella dissipazione dell'energia cinetica in energia termica simulando l'effetto di una viscosità artificiale. Come già visto nella sezione precedente usando questa viscosità si ottengono dei buoni risultati anche nella zona di rarefazione e di discontinuità di contatto. Infatti, anche se ricompaiono delle oscillazioni nella soluzione, la posizione del fronte di shock è più vicina alla soluzione analitica. In conclusione se la diffusione termica proposta da Price ha anche degli effetti simili a quelli di una viscosità artificiale, sarà importante anche il tipo di viscosità artificiale da associare col fine di evitare un effetto combinato che possa simulare una viscosità troppo grande. Questa considerazione è particolarmente importante per il test seguente di Kelvin-Helmholtz dove la viscosità artificiale gioca un ruolo fondamentale nella riuscita del test, come vedremo nella prossima sezione.

Diffusione termica di Price senza viscosità artificiale

Come ultimo caso si analizzeranno i risultati di un test Sod usando solamente la diffusione termica di Price, senza l'uso della viscosità artificiale. Tale test viene fatto per capire se la sola diffusione termica di Price è in grado di simulare correttamente un Sod test. Questo perchè come visto precedentemente, anche la diffusione termica di Price ha degli effetti simili a quelli prodotti dalla viscosità artificiale. Annullando la viscosità artificiale si impone che $\alpha = 0$ durante tutta l'evoluzione del sistema. In pratica della diffusione di Price rimane soltanto il contributo del secondo termine dipendente da α_u nell'Eq. (3.15). In figura 3.13 viene mostrato l'andamento in pressione, velocità e densità, ed inoltre vi sono gli ingrandimenti della zona di rarefazione, della zona della discontinuità di contatto e della zona di shock. In tale figura si vede chiaramente che, anche in questo caso, la soluzione numerica è molto rumorosa e lo shock non viene simulato correttamente. Tale test dimostra che per una corretta simulazione del problema di Riemann si ha bisogno sia di una viscosità artificiale che si occupi di trasformare energia cinetica in energia termica, sia di una diffusione termica che risolva il problema dell'artefatto di pressione e introduca un mixing in densità ed energia.

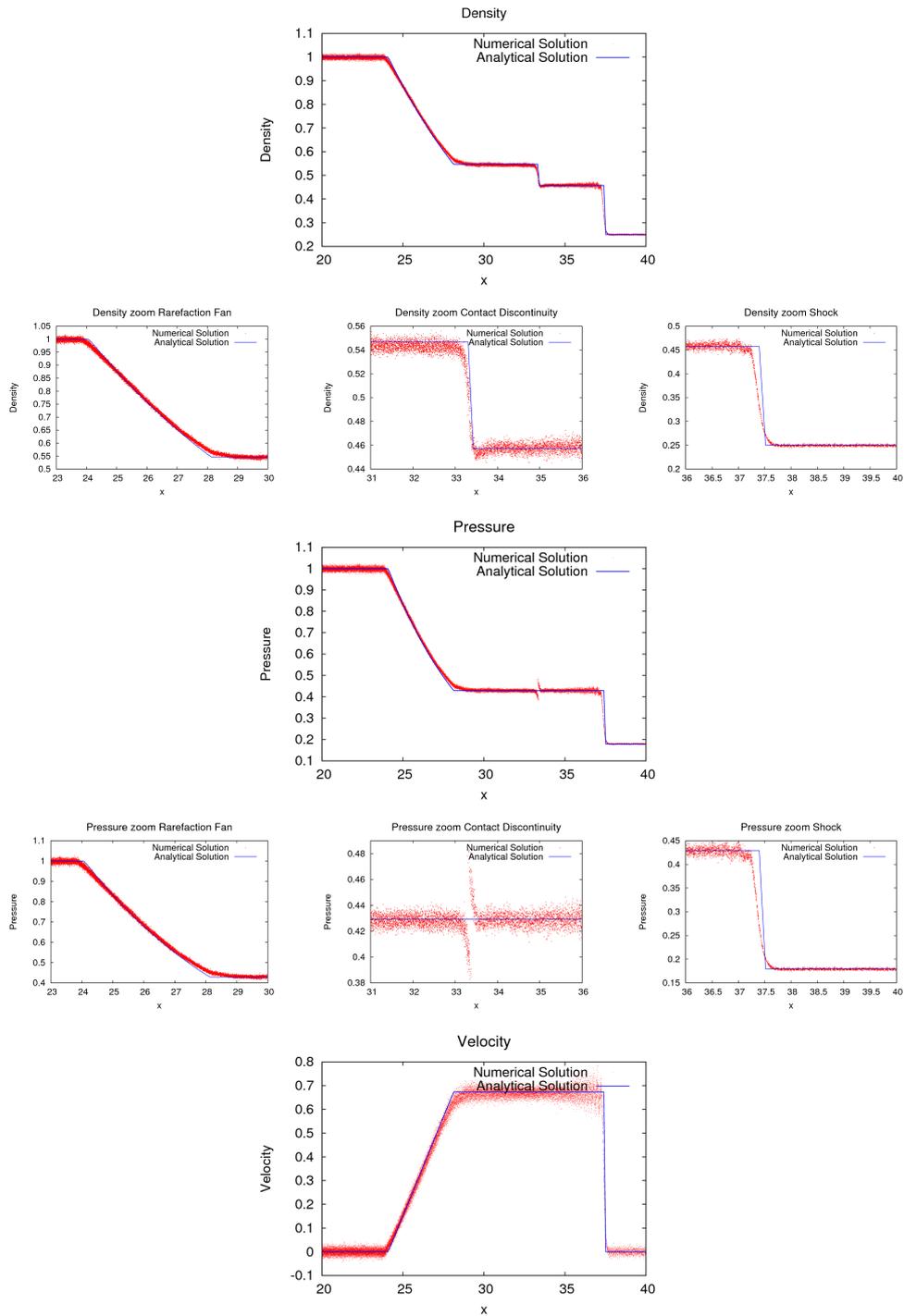


Figura 3.4: Traditional SPH. Sod test. Nei tre grafici principali vengono mostrate le variazioni della pressione, della velocità e della densità in funzione della posizione all'interno del tubo; mentre nei pannelli più piccoli vengono mostrati, per ogni grafico, i particolari della zona di rarefazione, della zona di discontinuità di contatto e della zona di shock. Le quantità rappresentate sono da riferirsi al tempo del codice $t = 5$. I punti rossi rappresentano la soluzione numerica, mentre la linea blu rappresenta la soluzione analitica.

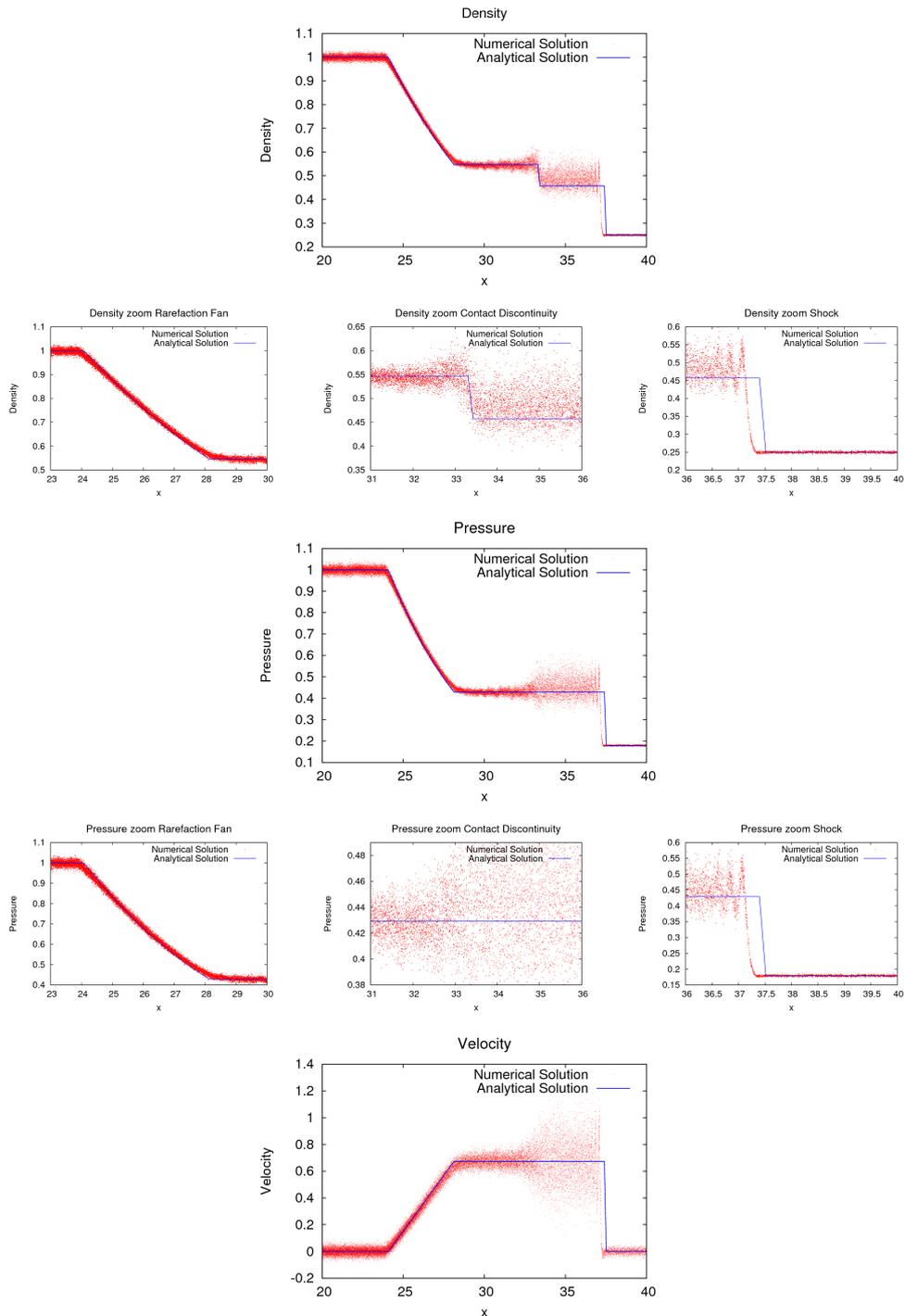


Figura 3.5: Traditional SPH senza viscosità artificiale. Sod test. Nei tre grafici principali vengono mostrate le variazioni della pressione, della velocità e della densità in funzione della posizione all'interno del tubo; mentre nei pannelli più piccoli vengono mostrati, per ogni grafico, i particolari della zona di rarefazione, della zona di discontinuità di contatto e della zona di shock. Le quantità rappresentate sono da riferirsi al tempo del codice $t = 5$. I punti rossi rappresentano la soluzione numerica, mentre la linea blu rappresenta la soluzione analitica.

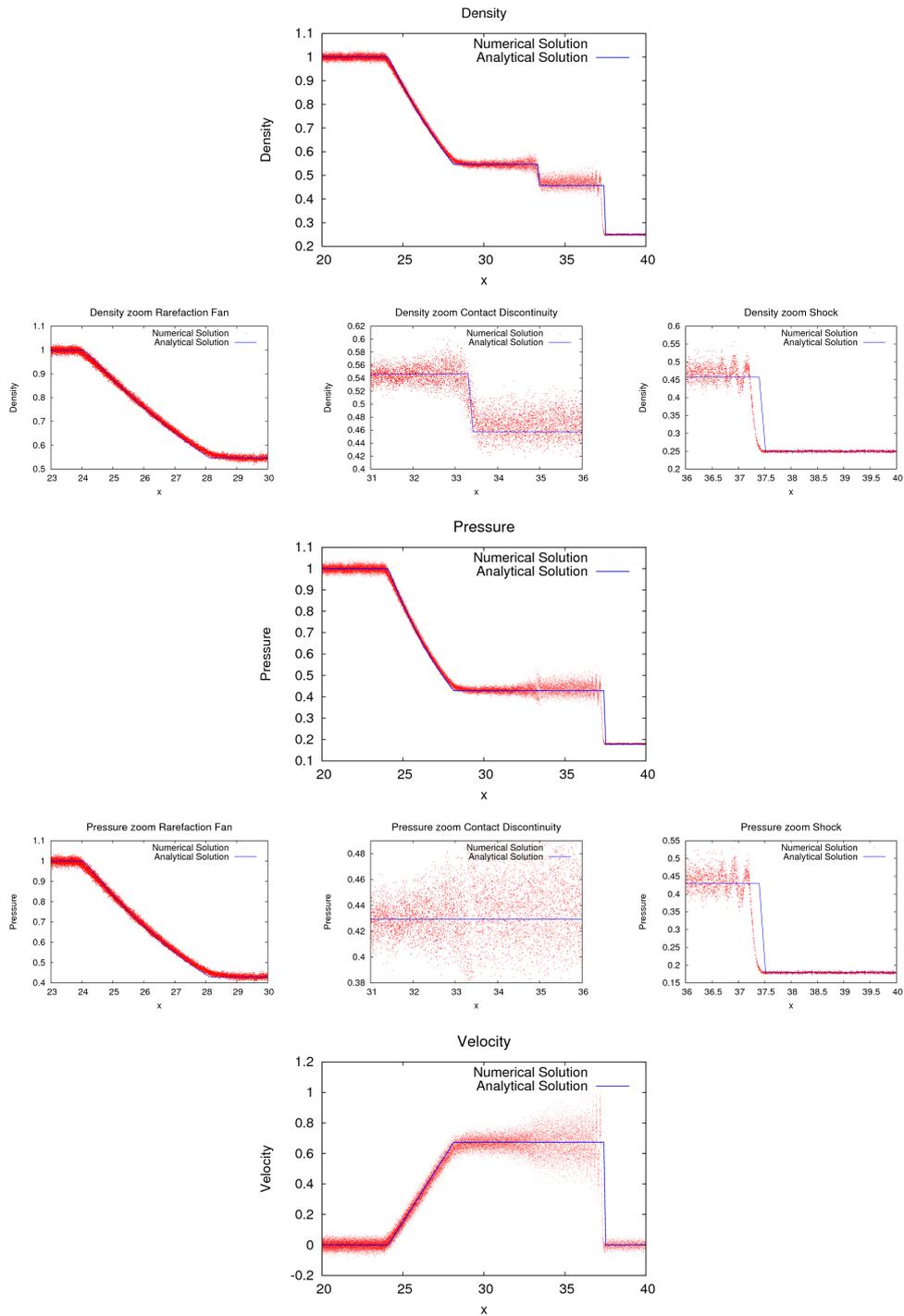


Figura 3.6: Traditional SPH con viscosita' artificiale dipendente dal tempo come presentata nella Sez. 2.1.7 con $\alpha_{init} = \alpha_{min} = 0.01$. Sod test. Nei tre grafici principali vengono mostrate le variazioni della pressione, della velocita' e della densita' in funzione della posizione all'interno del tubo; mentre nei pannelli piú piccoli vengono mostrati, per ogni grafico, i particolari della zona di rarefazione, della zona di discontinuita' di contatto e della zona di shock. Le quantitá rappresentate sono da riferirsi al tempo del codice $t = 5$. I punti rossi rappresentano la soluzione numerica, mentre la linea blu rappresenta la soluzione analitica.

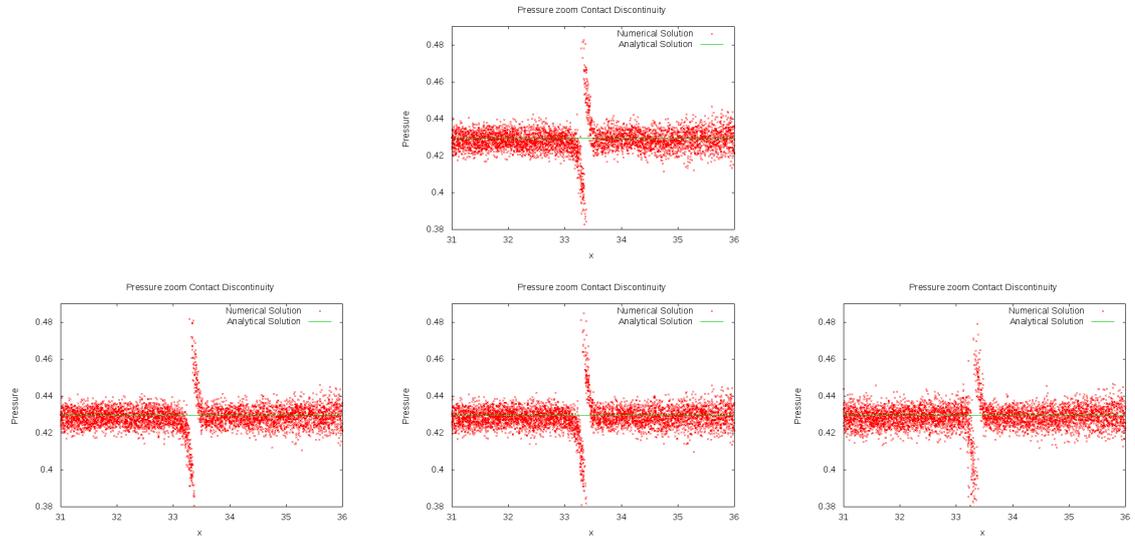


Figura 3.7: Diffusione termica di Wadsley allo schema SPH. Sod test. Si mostra l'andamento del blip in pressione nella zona della discontinuità di contatto. Nel primo grafico in alto e' mostrato l'andamento per la versione Traditional SPH mentre nella seconda riga vengono mostrati gli andamenti per quanto riguarda la formulazione di Wadsley con tre diversi coefficienti $C = 0.05$ a sinistra, $C = 0.1$ in centro, $C = 0.5$ a destra.

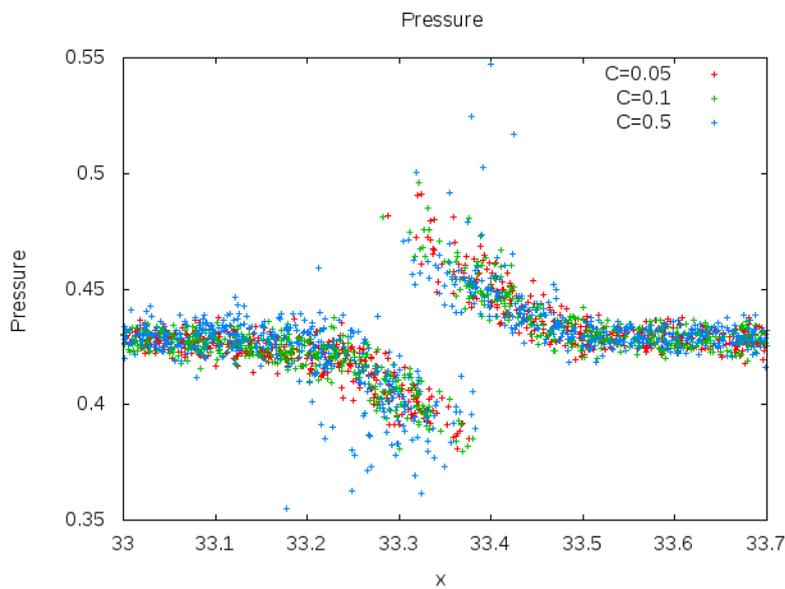


Figura 3.8: In questo grafico vengono mostrati gli andamenti sovrapposti per quanto riguarda la formulazione di Wadsley con tre diversi coefficienti: $C = 0.05$ in rosso, $C = 0.1$ in verde, $C = 0.5$ in blu.

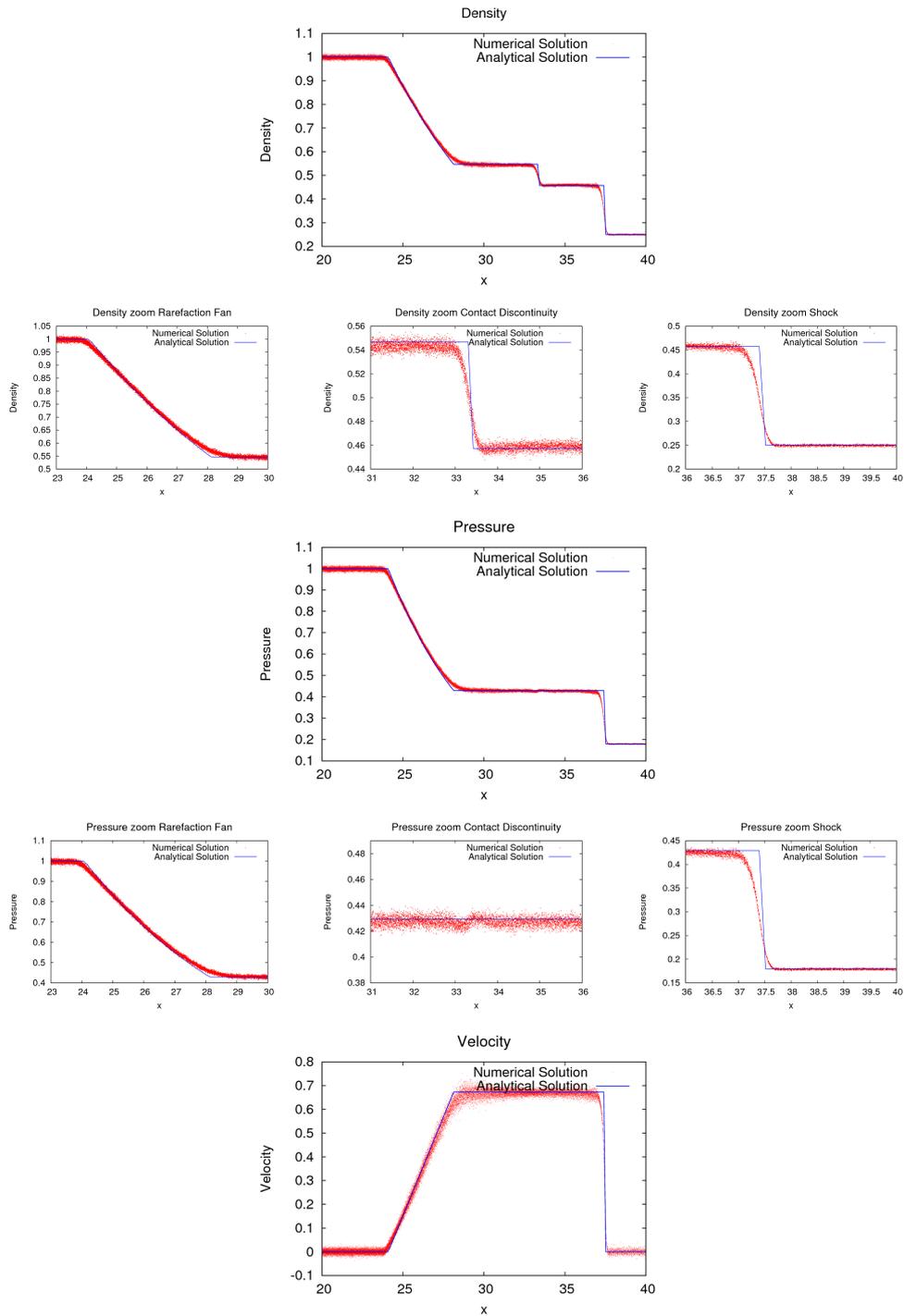


Figura 3.9: Diffusione termica di Price con una viscosità dipendente dal tempo come presentata in Sez. 3.2.1. Sod test. Nei tre grafici principali vengono mostrate le variazioni della pressione, della velocità e della densità in funzione della posizione all'interno del tubo; mentre nei pannelli più piccoli vengono mostrati, per ogni grafico, i particolari della zona di rarefazione, della zona di discontinuità di contatto e della zona di shock. Le quantità rappresentate sono da riferirsi al tempo del codice $t = 5$. I punti rossi rappresentano la soluzione numerica, mentre la linea blu rappresenta la soluzione analitica.

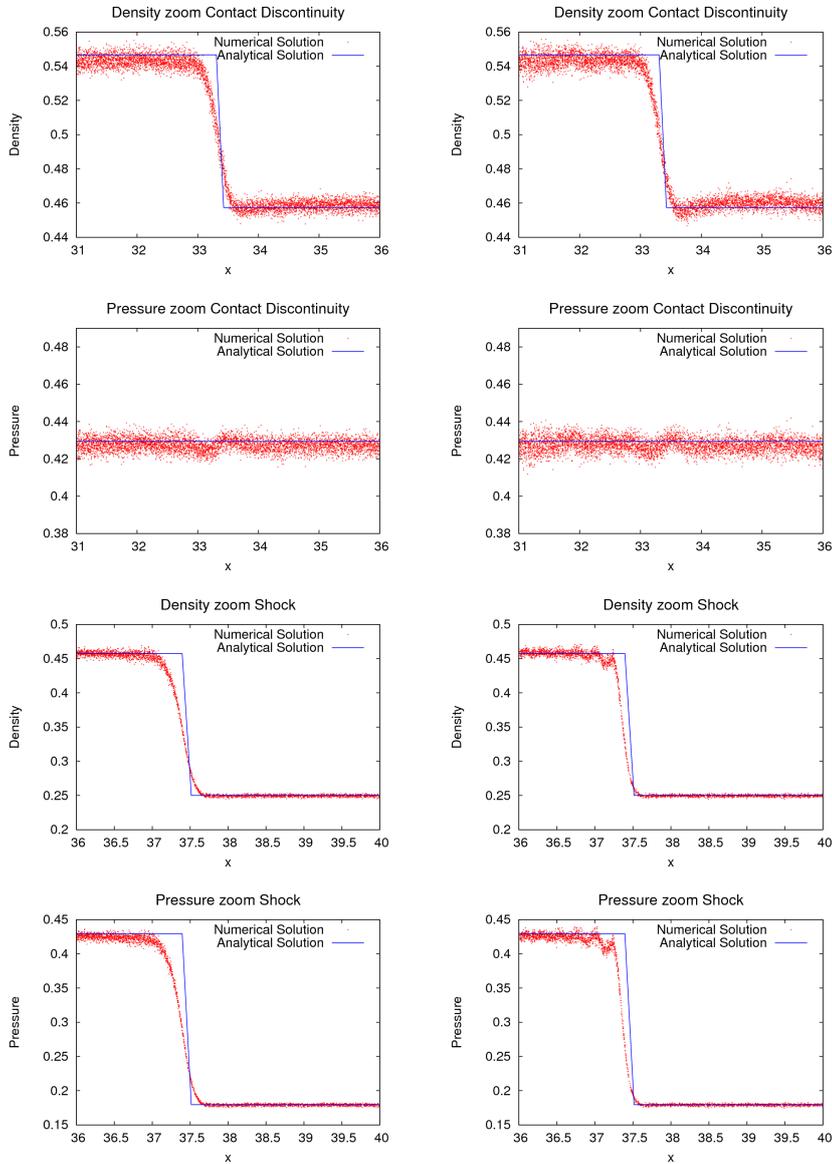


Figura 3.10: Andamento della pressione e della densità nella zona di shock e nella zona della discontinuità di contatto. Nella colonna di sinistra viene presentato il risultato ottenuto usando una viscosità artificiale dipendente dal tempo, come proposta da Price e discussa in Sez. 3.2.1. Nella colonna di destra alla correzione di Price viene associata una viscosità artificiale dipendente dal tempo, come come discussa in Sez. 2.1.7

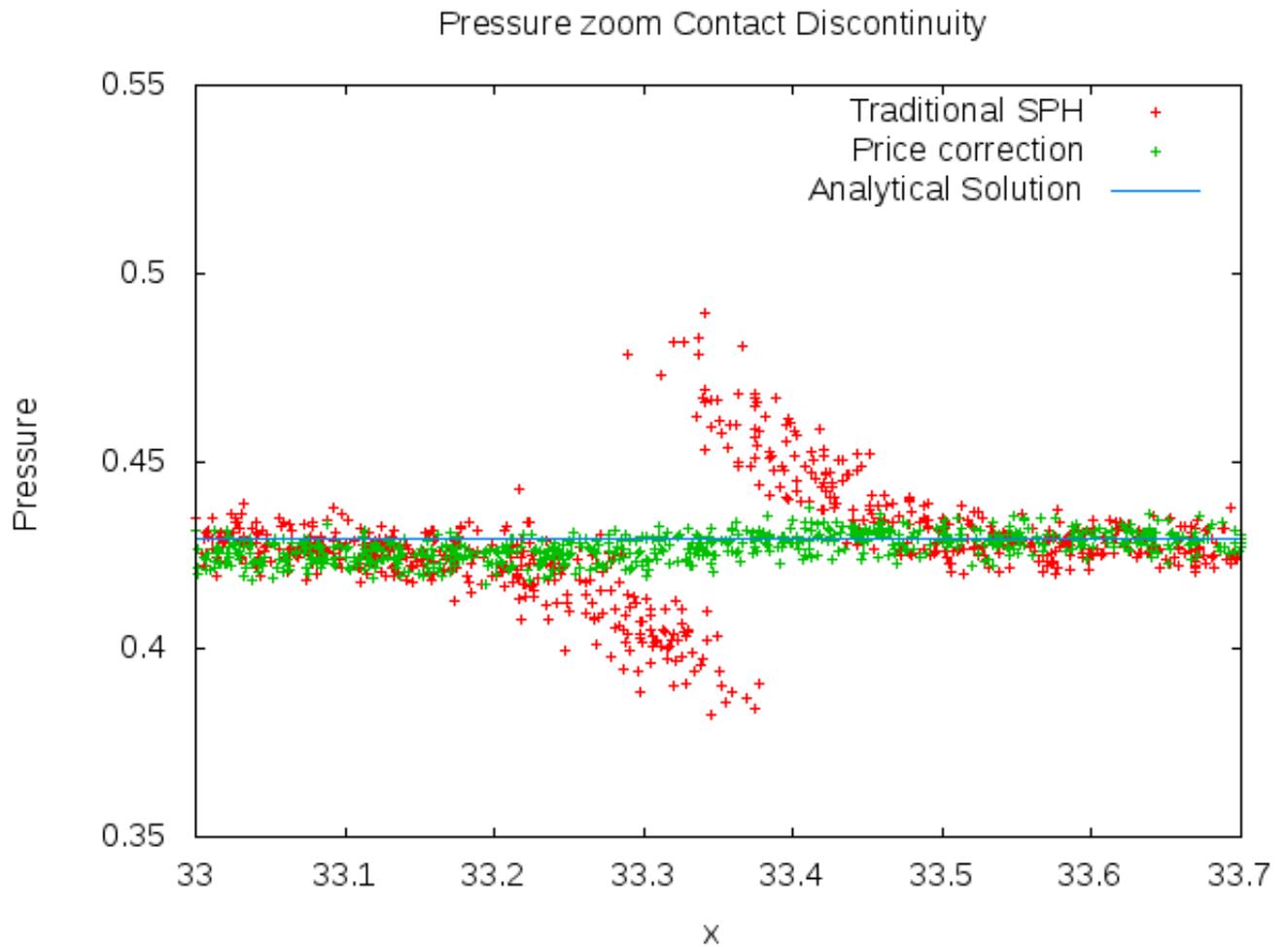


Figura 3.11: Differenze nella Risoluzione del blip in pressione usando Traditional SPH, in rosso, e diffusione di Price, in verde

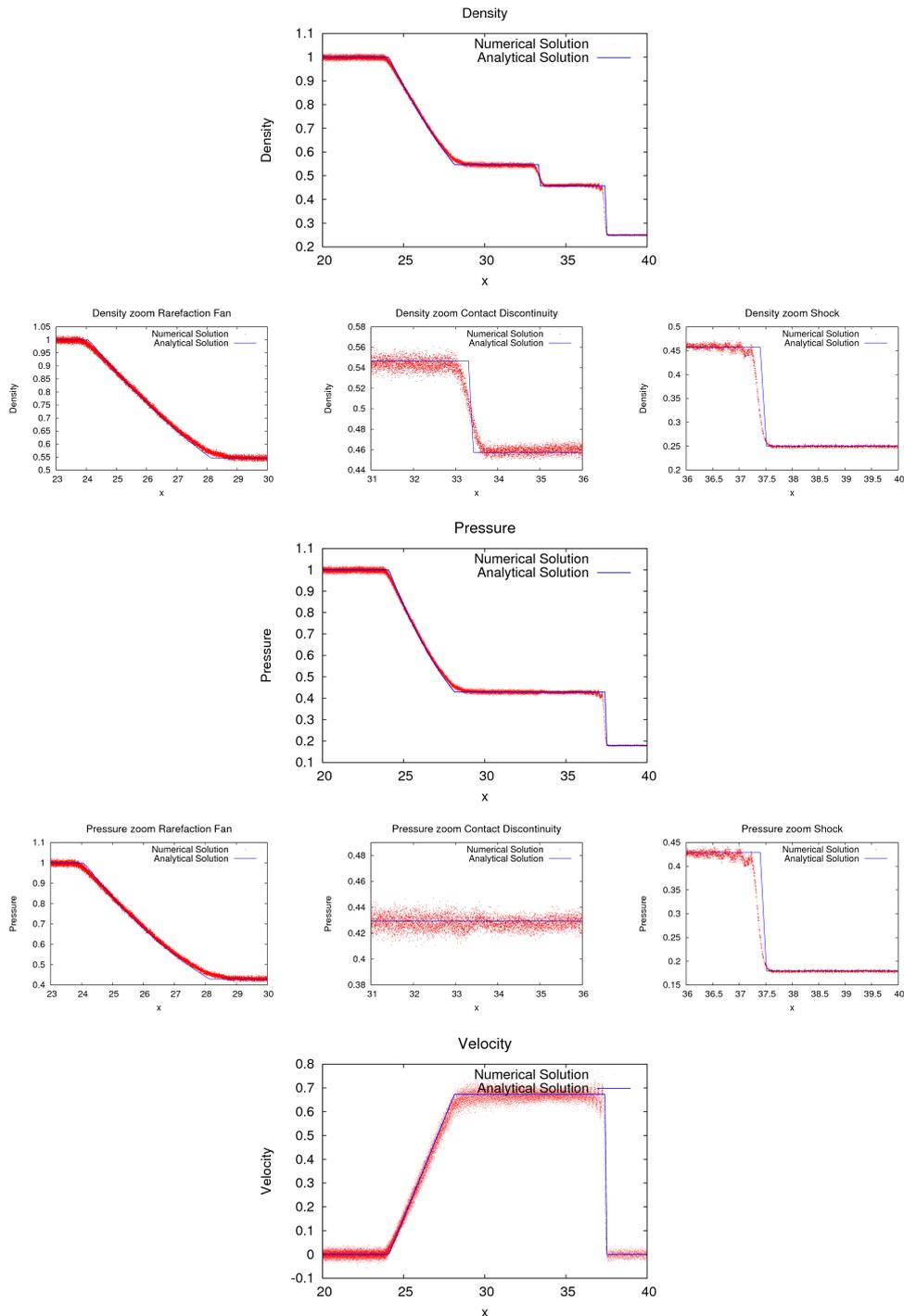


Figura 3.12: Diffusione termica di Price con viscosità artificiale dipendente dal tempo come presentata in Sez. 2.1.7, partendo dal valore minimo per il parametro $\alpha_{init} = \alpha_{min} = 0.01$. Sod test. Nei tre grafici principali vengono mostrate le variazioni della pressione, della velocità e della densità in funzione della posizione all'interno del tubo; mentre nei pannelli più piccoli vengono mostrati, per ogni grafico, i particolari della zona di rarefazione, della zona di discontinuità di contatto e della zona di shock. Le quantità rappresentate sono da riferirsi al tempo del codice $t = 5$. I punti rossi rappresentano la soluzione numerica, mentre la linea blu rappresenta la soluzione analitica.

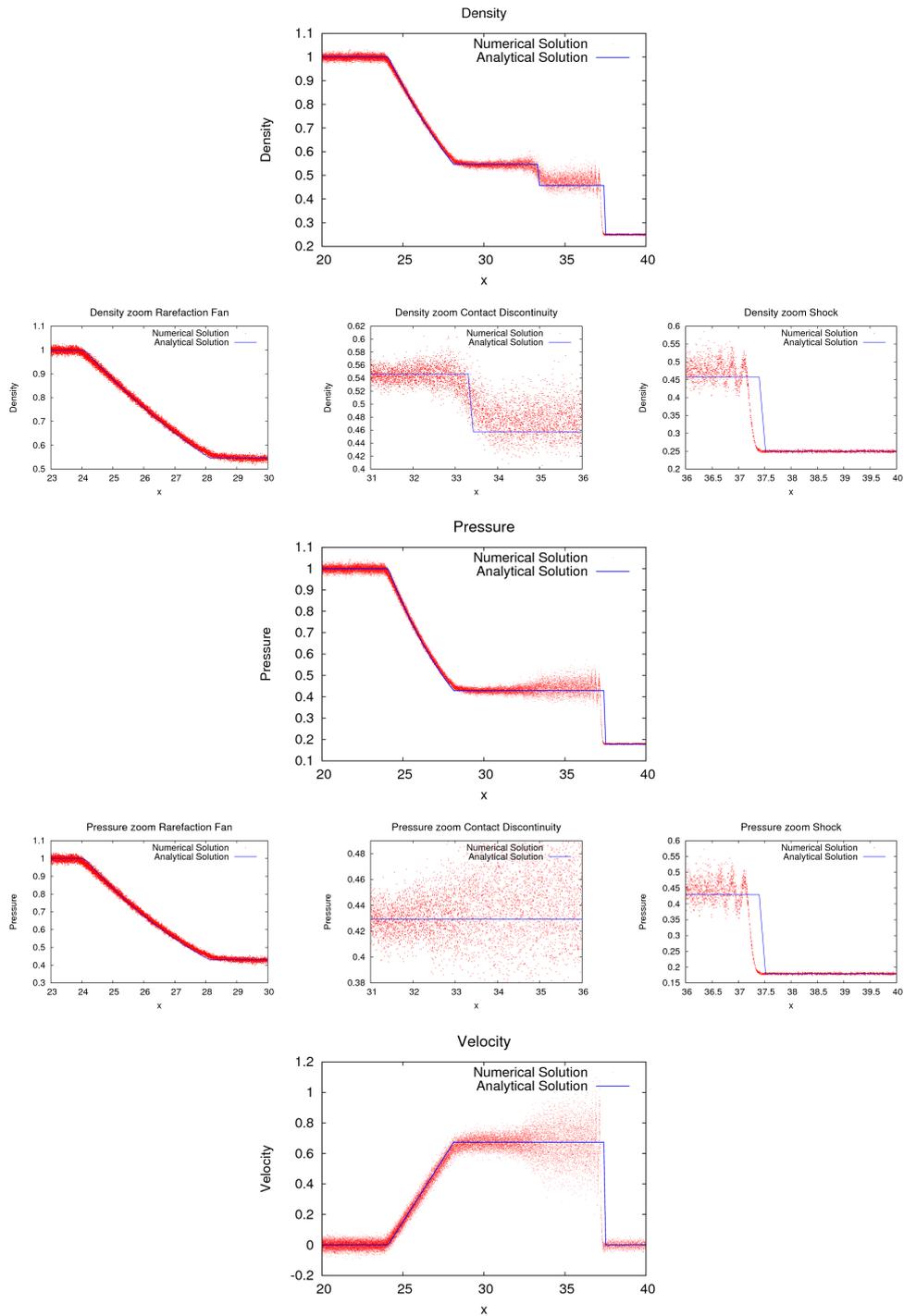


Figura 3.13: Diffusione termica di Price senza viscosità artificiale. Sod test. Nei tre grafici principali vengono mostrate le variazioni della pressione, della velocità e della densità in funzione della posizione all'interno del tubo; mentre nei pannelli più piccoli vengono mostrati, per ogni grafico, i particolari della zona di rarefazione, della zona di discontinuità di contatto e della zona di shock. Le quantità rappresentate sono da riferirsi al tempo del codice $t = 5$. I punti rossi rappresentano la soluzione numerica, mentre la linea blu rappresenta la soluzione analitica.

3.3.5 Test multifase per instabilità di Kelvin Helmholtz

Le instabilità di Kelvin Helmholtz si sviluppano all'interfaccia di due diversi strati di fluido che scorrono l'uno accanto all'altro con una velocità relativa non nulla. La viscosità tende a creare una turbolenza nella zona di contatto che provoca un mescolamento fra i diversi strati di fluido.

L'instabilità di Kelvin Helmholtz si crea quando una differenza di velocità tangenziale è presente nell'interfaccia fra due fluidi diversi. In questa configurazione qualsiasi perturbazione nel campo di velocità perpendicolare all'interfaccia, genera un'instabilità idrodinamica che ha come effetto il mescolamento fra i fluidi. Applicando l'analisi presentata in Chandrasekar nel 1961 per fluidi incomprimibili e trascurando gli effetti gravitazionali, otteniamo una relazione di dispersione per l'instabilità di Kelvin Helmholtz della forma:

$$\omega = k \frac{(\rho_1 \rho_2)^{1/2} |v_t^1 - v_t^2|}{(\rho_1 + \rho_2)}, \quad (3.24)$$

dove v_t sono le velocità tangenziali per le due fasi del fluido, ω è la frequenza temporale e k è la frequenza spaziale [40]. Questa relazione lega la frequenza spaziale alla frequenza temporale dell'instabilità, quindi sapendo che

$$\tau_{KH} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi (\rho_1 \rho_2)^{1/2} |v_t^1 - v_t^2|}{k (\rho_1 + \rho_2)}, \quad (3.25)$$

si calcola il tempo caratteristico dell'instabilità per i parametri usati nel test, che è $\tau_{KH} = 3.40$ in unità di tempo della simulazione.

Condizioni iniziali Kelvin-Helmholtz test

Il fluido è un gas ideale con un indice politropico $\gamma = 1.4$ in Eq. (2.42). Il test è costruito in modo da avere due fluidi con densità, temperature e velocità lungo l'asse x diverse, ma in equilibrio di pressione. In particolare la box ha una lunghezza di 256 kpc , un'altezza di 256 kpc e una larghezza di 16 kpc , i due fluidi uno interno e l'altro esterno hanno le seguenti proprietà $(\rho_1, \rho_2) = (6.26 \times 10^{-7}, 3.13 \times 10^{-7})$, $(T_1, T_2) = (5 \times 10^6, 10^7)K$, $(v_x^1, v_x^2) = (40, -40) \text{ Km s}^{-1}$, in modo che:

$$\rho, T, v_x = \begin{cases} \rho_1, T_1, v_1 & \text{se } |y| < 64 \text{ Kpc} \\ \rho_2, T_2, v_2 & \text{se } |y| > 64 \text{ Kpc} \end{cases} \quad (3.26)$$

Le condizioni iniziali sono visibili in figura (3.14). Il numero totale di punti interpolanti, e quindi particelle SPH usate, è 774144 e il numero di vicini usati è 442 che è il numero standard usato per questo test in modo da comparare risultati forniti da codici diversi.

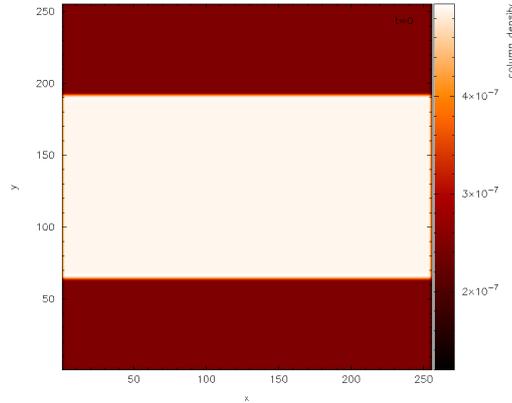


Figura 3.14: Condizioni iniziali per il test multifase per instabilità di Kelvin Helmholtz

Inoltre il sistema è leggermente perturbato nelle velocità lungo y seguendo la formula:

$$v_y = \delta v_y \left[\sin \left(\frac{2\pi(x + \frac{\lambda}{2})}{\lambda} \right) \exp(-10(y - 64)^2) - \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \exp(-10(y + 64)^2) \right], \quad (3.27)$$

in modo da favorire l'instaurarsi dell'instabilità ad una particolare lunghezza d'onda. La lunghezza d'onda scelta è $\lambda_{KH} = 128Kpc$.

Soluzione attesa

In figura (3.15) viene mostrata la mappa di densità dei due fluidi dopo un tempo caratteristico di Kelvin Helmholtz, simulato con un codice di tipo Euleriano [6]. Come ci si aspetta si forma una instabilità idrodinamica alla lunghezza d'onda di $128kpc$. Si nota che oltre ad avere la caratteristica forma a vortice, il fluido più denso tende a mescolarsi in densità con il fluido meno denso, tale mescolamento è influenzato direttamente dal formarsi dell'instabilità. Infatti si vede che il fluido sulla coda del vortice ha una densità minore rispetto a quello che si trova alla base.

3.3.6 KH: Versione tradizionale dello schema SPH

Nella versione Tradizionale dell'SPH l'introduzione di una viscosità artificiale e quindi l'instaurarsi di una tensione superficiale spuria, come visto nella sezione 2.3.1, limita di molto capacità del codice di simulare questo test idrodinamico. Inoltre anche in questo caso si è in presenza di zone di discontinuità fra fasi diverse del fluido, e quindi anche in tale test emergono i problemi già discussi dello schema SPH, che come visto, sono indipendenti dall'introduzione di una tensione superficiale artificiale. I due fluidi, infatti, tendono a restare separati senza mescolarsi. In figura (3.16) viene presentata l'evoluzione delle mappe di

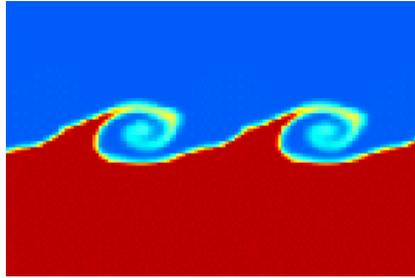


Figura 3.15: Mappa di densità dei due fluidi dopo un tempo caratteristico di Kelvin Helmholtz, simulato con un codice di tipo Euleriano [6].

densità dei due fluidi a quattro diversi tempi. Nella figura in basso a sinistra siamo a $t = 4$ e l'instabilità dovrebbe già essersi formata essendo $\tau_{KH} = 3.40$, cosa che non accade. Si vede che le due zone di fluido restano ben visibili e il mixing è praticamente inesistente, i due fluidi, infatti, tendono a restare separati senza mescolarsi. La sola differenza da un andamento perfettamente laminare è data dal fatto che viene imposta una perturbazione nella velocità lungo y per fissare la lunghezza d'onda della prima perturbazione a instaurarsi.

KH: Versione tradizionale dello schema SPH senza viscosità artificiale

Interessante capire come si comporta il codice senza l'uso di una viscosità artificiale. In figura (3.17) presentiamo il risultato del test di KH senza l'uso della viscosità artificiale. Come si vede le instabilità si formano già a $t = 2$ nel grafico in alto a destra. Esse sembrano avere una forma che assomiglia a quella aspettata, ma man mano che l'evoluzione temporale procede si vede che questo abbozzo di vortice non si richiude ma, anzi, sembra allontanarsi dal centro. Tale fenomeno è dovuto al fatto che il codice non riesce a trasformare l'energia cinetica dello shock, rappresentato dalla perturbazione, in energia termica. Lo shock quindi non viene catturato e procede come in un fluido senza viscosità. Questo fenomeno è simile a quello visto per il Sod test senza viscosità artificiale. Infatti le particelle che appartengono al vortice non convertono la loro energia cinetica in energia termica e inoltre tendono a compenetrarsi. Questi due effetti fanno sì che le instabilità, anche se si creano, non vengono catturate e anzi proseguono indisturbate allontanandosi dal centro.

KH: Versione tradizionale dello schema SPH con viscosità artificiale dipendente dal tempo

Analogo a quest'ultimo risultato è il caso del test di KH simulato usando una viscosità artificiale dipendente dal tempo come presentata in Sez. 2.1.7, partendo

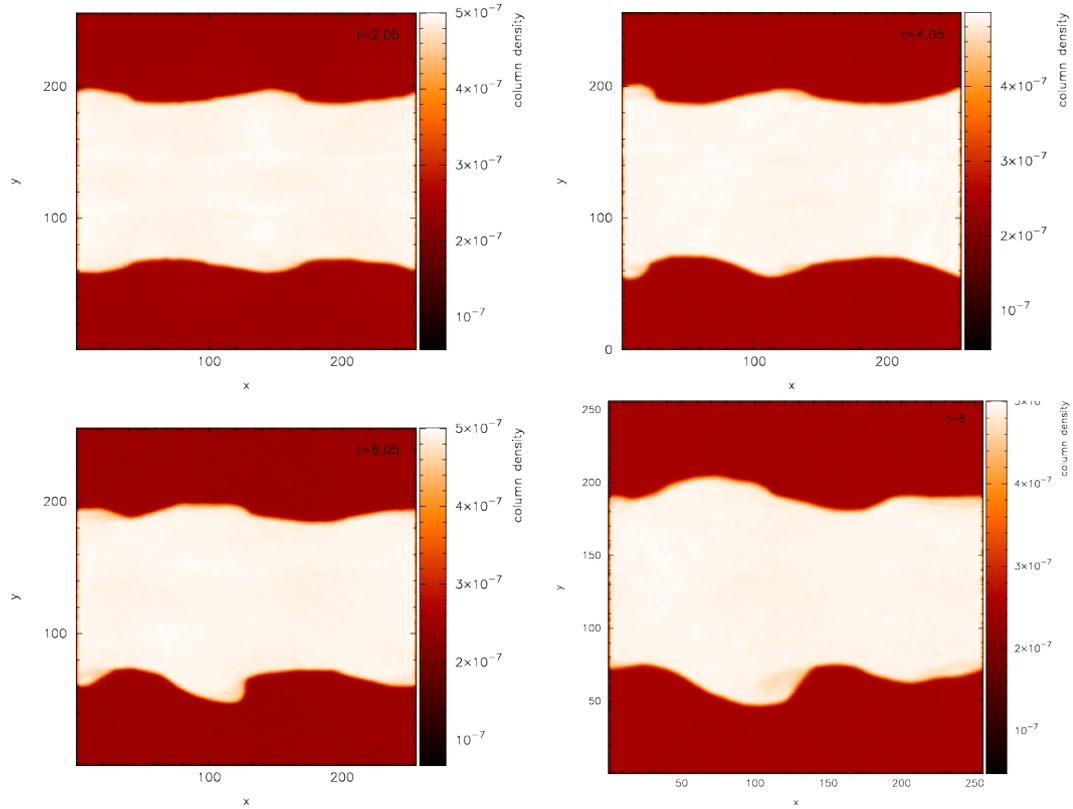


Figura 3.16: KH test. Traditional SPH. Evoluzione delle mappe di densità dei due fluidi a quattro diversi tempi. Nel riquadro in alto a sinistra a mappa di densità a tempo del codice $t = 2$. In alto a destra mappa di densità a tempo del codice $t = 4$, tempo tipico di formazione di instabilità di KH a lunghezza d'onda 128 kpc . In basso a sinistra a $t = 6$. In basso a destra a $t = 8$.

dal valore minimo per il parametro $\alpha_{init} = \alpha_{min} = 0.01$. In figura 3.18 viene presentata l'evoluzione delle mappe di densità dei due fluidi a quattro diversi tempi. Come già visto nel test Sod con questa versione del codice Sez. 3.3.2 il comportamento è simile al caso senza viscosità artificiale: le instabilità si creano, ma non vengono catturate e si allontanano sempre più dal centro. Quindi la presenza di una viscosità artificiale limita la formazione delle instabilità di Kelvin-Helmholtz. Tuttavia anche cercando di ridurre i suoi effetti nelle zone non interessate dagli shock, non basta per un corretto sviluppo delle instabilità.

3.3.7 KH: Diffusione termica di Wadsley

In figura (3.19) viene presentata l'evoluzione delle mappe di densità dei due fluidi a quattro diversi tempi, usando la diffusione termica di Wadsley e un coefficiente $C = 0.1$. Quello che si vede è comunque una differenza con il caso Traditional.

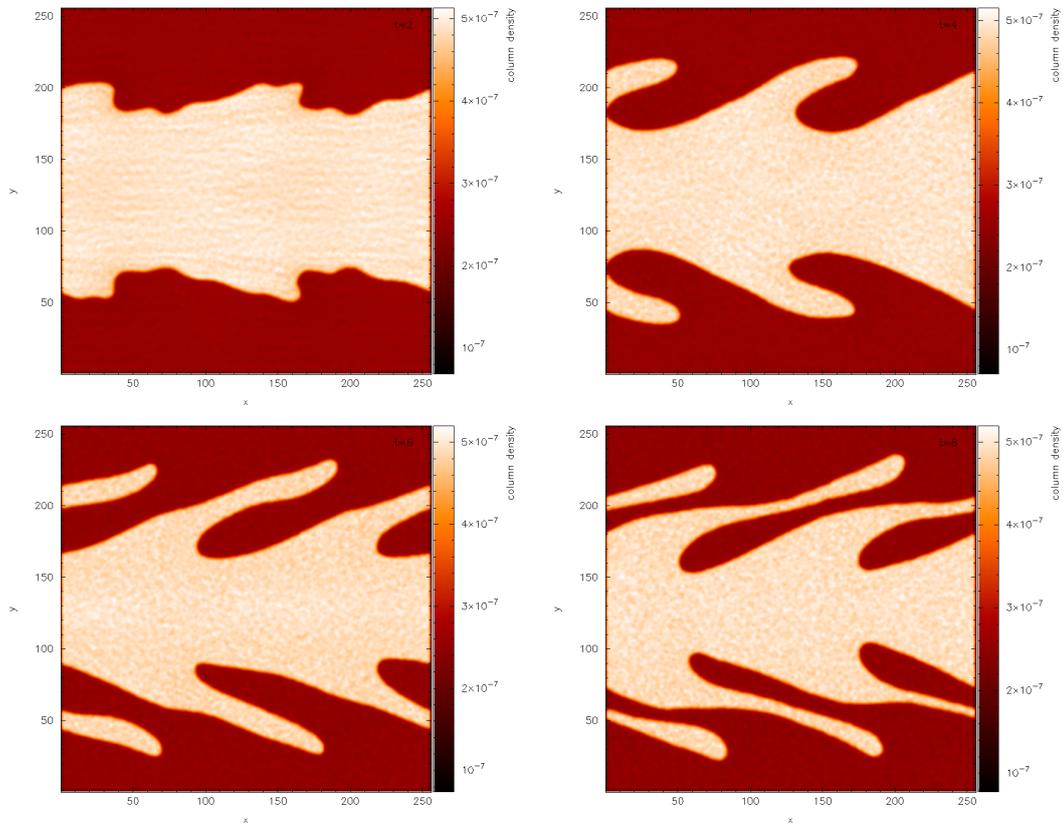


Figura 3.17: KH test. Tradizionale SPH senza viscosità artificiale. Evoluzione delle mappe di densità dei due fluidi a quattro diversi tempi. Nel riquadro in alto a sinistra a mappa di densità a tempo del codice $t = 2$. In alto a destra mappa di densità a tempo del codice $t = 4$, tempo tipico di formazione di instabilità di KH a lunghezza d'onda $128kpc$. In basso a sinistra a $t = 6$. In basso a destra a $t = 8$.

Infatti già a $t = 2$ vediamo che si creano delle instabilità che poi evolvono a $t = 4$, ma esse non hanno la forma che ci si aspetta. Inoltre si vede che queste instabilità non comportano un efficiente mixing in densità. Usando la formula presentata da Wadsley per la diffusione dell'energia vediamo che le instabilità di Kelvin Helmholtz sono comunque inibite ma si percepisce che la forma che assumono i due fluidi è più simile a quella attesa. Nonostante questo però permane un'assenza di mixing e quindi le due regioni di fluido appaiono ancora ben separate. In figura 3.19 vediamo il test multifase simulato con un coefficiente $C = 0.1$ il comportamento non cambia molto se aumentiamo il coefficiente. Tuttavia aumentandolo troppo, $C = 0.5$, si ottiene un mixing eccessivamente efficiente che mescola praticamente subito i due fluidi, senza dar luogo tuttavia allo sviluppo delle instabilità di Kelvin-Helmholtz.

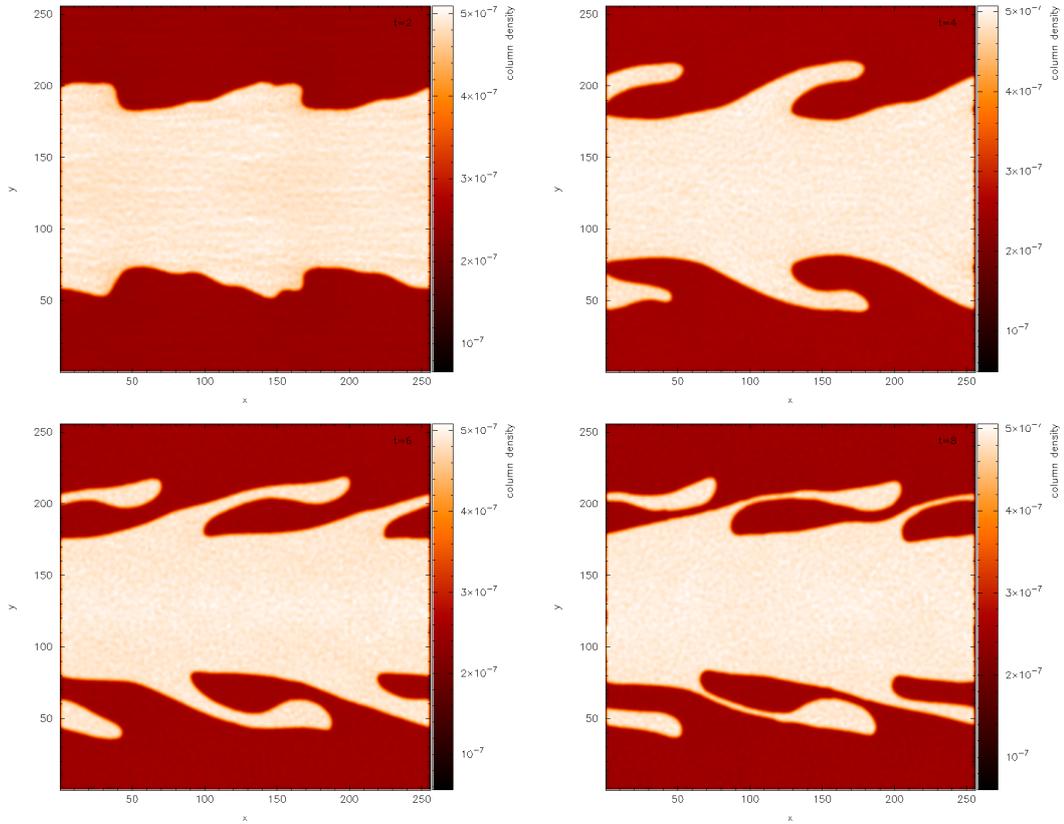


Figura 3.18: KH test. Traditional SPH, con viscosità artificiale dipendente dal tempo come presentata in Sez. 2.1.7, partendo dal valore minimo per il parametro $\alpha_{init} = \alpha_{min} = 0.01$. Evoluzione delle mappe di densità dei due fluidi a quattro diversi tempi. Nel riquadro in alto a sinistra a mappa di densità a tempo del codice $t = 2$. In alto a destra mappa di densità a tempo del codice $t = 4$, tempo tipico di formazione di instabilità di KH a lunghezza d'onda $128kpc$. In basso a sinistra a $t = 6$. In basso a destra a $t = 8$.

3.3.8 KH: Diffusione termica di Price

In figura (3.20) viene presentata l'evoluzione delle mappe di densità dei due fluidi a quattro diversi tempi, usando la diffusione termica di Price e la viscosità presentata in Sez. 3.2.1, si nota subito come il mixing sia maggiore. Nelle zone di contatto fra le due fasi, infatti, si nota un visibile mescolamento dovuto al reciproco scorrere dei fluidi. Per quanto riguarda la formazione delle instabilità permane il fatto che non sembrano svilupparsi i vortici tipici dell'instabilità di Kelvin Helmholtz. Quello che è possibile notare è che il mescolamento avviene, ma appare più simile ad un caso in cui la differenza in densità sia molto più alta di quanto effettivamente è. Questo può essere dovuto ad un'eccessiva viscosità artificiale introdotta dalla diffusione termica. Il mescolamento non risulta corretto nonostante sia scomparso l'artefatto in pressione nella zona della discontinuità di

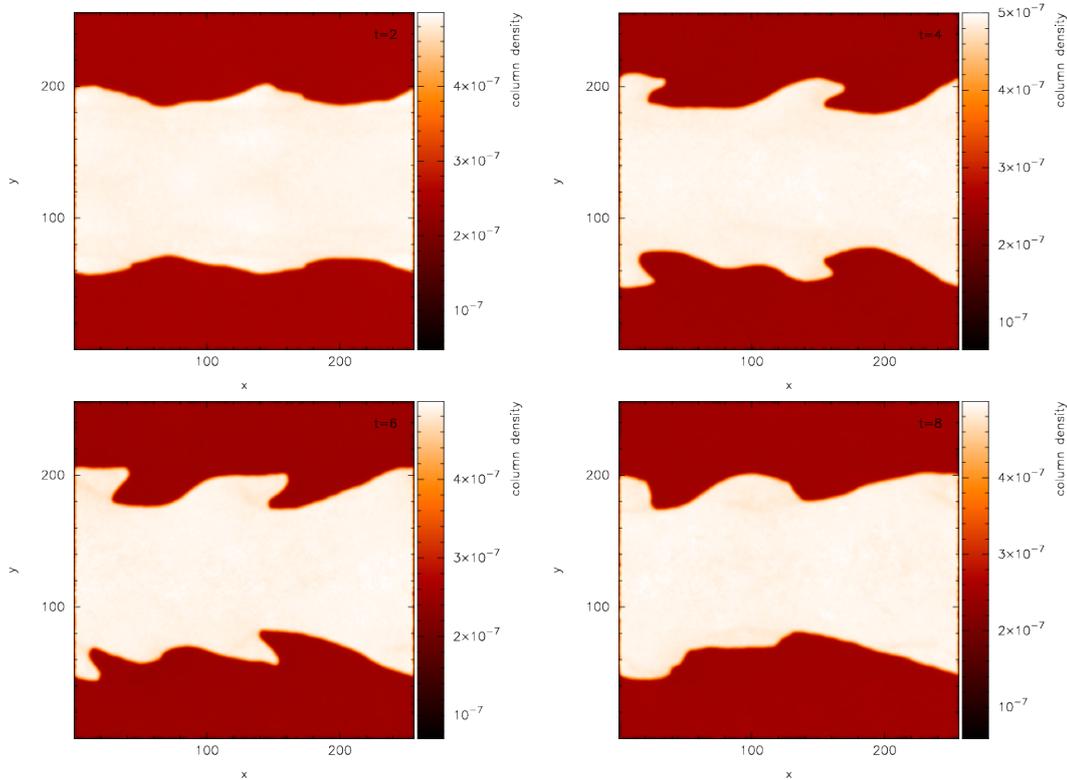


Figura 3.19: KH test. Diffusione termica di Wadsley. Evoluzione delle mappe di densità dei due fluidi a quattro diversi tempi. Nel riquadro in alto a sinistra a mappa di densità a tempo del codice $t = 2$. In alto a destra mappa di densità a tempo del codice $t = 4$, tempo tipico di formazione di instabilità di KH a lunghezza d'onda $128kpc$. In basso a sinistra a $t = 6$. In basso a destra a $t = 8$.

contatto, come si vede in figura (3.21). Infatti in figura (3.21) viene rappresentato l'andamento della pressione e della densità in una sezione unidimensionale del fluido, per tre diverse simulazioni al tempo della simulazione $t = 2$. Questa sezione è centrata sull'ascissa $x_{sec} = \frac{L_x}{2}$ e sull'ordinata a $y_{sec} = \frac{L_y}{2}$. A sinistra vediamo il test KH simulato usando la versione Traditional SPH, in centro con la diffusione termica di Wadsley, e a destra con la diffusione termica di Price e una viscosità come presentata in Sez. 3.2.1. Nella prima riga abbiamo le mappe di densità. Nella seconda riga abbiamo l'andamento della densità attraverso la sezione e nella terza riga l'andamento della pressione attraverso la sezione unidimensionale. Il profilo di densità fornisce un'indicazione del mixing fra le due diverse fasi del fluido. Si può vedere che il passaggio da fluido a bassa densità ad alta densità è più graduale per il codice che usa la diffusione di Price, ed invece molto netto per gli altri due codici. Il profilo di pressione mostra per i primi due codici il ben conosciuto artefatto in pressione già visto nel test di Sod. Tale artefatto è presente perchè anche in questo test si ha una zona di discontinuità

di contatto fra i due diversi fluidi. Come possiamo notare il test ottenuto usando il codice con la correzione di Price non presenta tale blip in pressione.

Come si è visto in Sez. 3.3.4 la diffusione termica di Price ha anche degli effetti simili alla viscosità artificiale. Si simulerà quindi questo test con una viscosità dipendente dal tempo, ma che parta da un valore di α minimo.

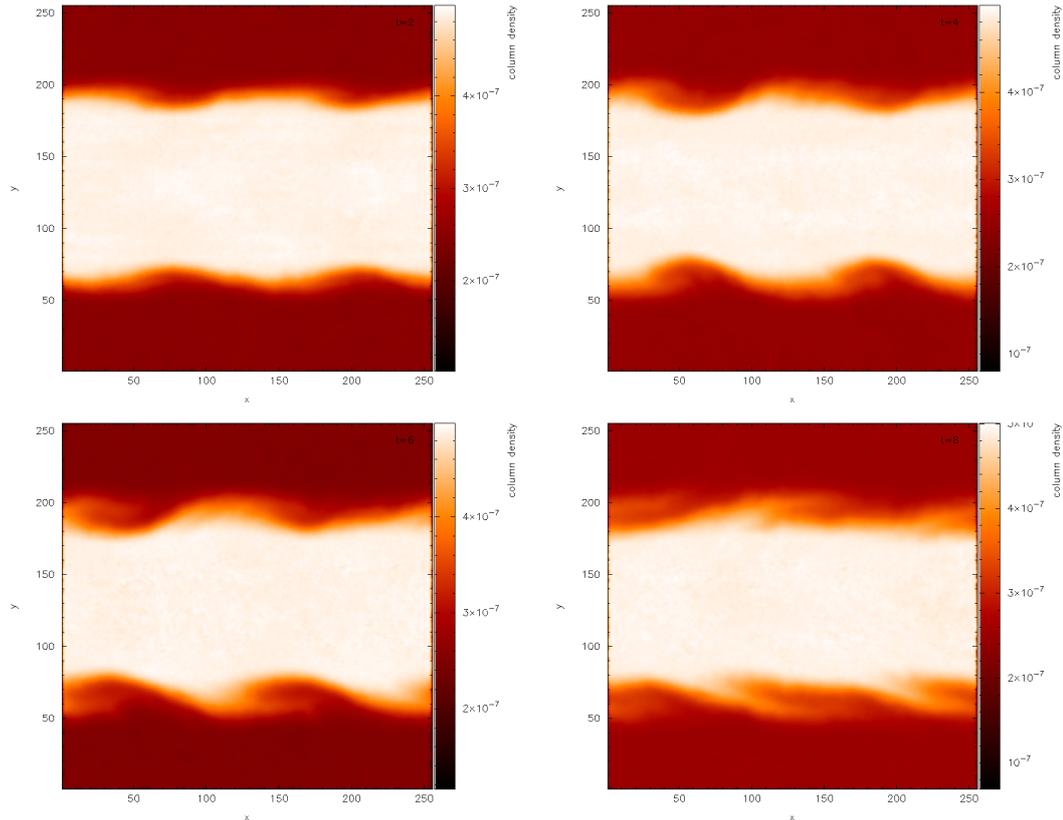


Figura 3.20: KH test. Diffusione termica di Price con una viscosità dipendente dal tempo come presentata in Sez. 3.2.1. Evoluzione delle mappe di densità dei due fluidi a quattro diversi tempi. Nel riquadro in alto a sinistra a mappa di densità a tempo del codice $t = 2$. In alto a destra mappa di densità a tempo del codice $t = 4$, tempo tipico di formazione di instabilità di KH a lunghezza d'onda $128kpc$. In basso a sinistra a $t = 6$. In basso a destra a $t = 8$.

KH: Diffusione termica di Price con viscosità artificiale dipendente dal tempo

Interessante notare come viene simulato il test di Kelvin Helmholtz usando la diffusione termica di Price e una viscosità artificiale dipendente dal tempo come

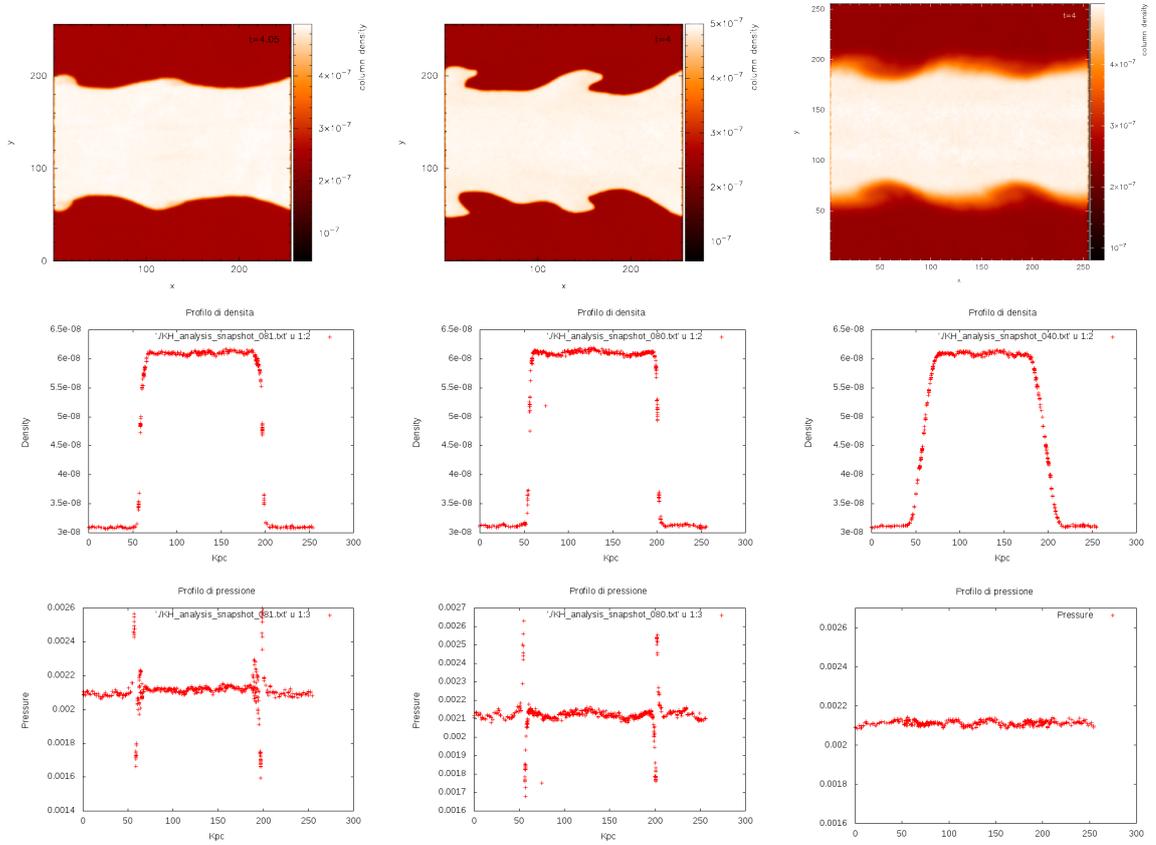


Figura 3.21: Confronto fra scatter plot di pressione e densità lungo una sezione a $x = 128\text{Kpc}$, confronto tre implementazioni Traditional SPH (sinistra), Wadsley (in mezzo), Price (a destra)

presentata in Sez. 2.1.7, ma partendo dal valore minimo per il parametro $\alpha_{init} = \alpha_{min} = 0.01$. In figura (3.22) viene presentata l'evoluzione delle mappe di densità dei due fluidi a otto diversi tempi separati da un intervallo di $\Delta t = 1$. Continuano a valere le considerazioni sul mixing in densità e la scomparsa dell'artefatto in pressione valide per il test precedente. Si nota inoltre che l'instabilità acquista una forma molto più simile alla soluzione attesa. Si vede, infatti, che, dopo un tempo del codice $t = 4$, tempo tipico di formazione di instabilità di KH a lunghezza d'onda 128kpc , si può facilmente riconoscere il vortice tipico dell'instabilità di KH. Questo ci porta a concludere che al fine dello sviluppo delle instabilità di KH la viscosità artificiale non deve essere troppo intensa perchè avrebbe l'effetto di smorzare di molto lo sviluppo dell'instabilità stessa. Questo si può capire osservando la figura (3.23) dove viene presentato lo stesso test con lo stesso codice, ma partendo da un valore massimo per il parametro $\alpha_{init} = \alpha_{max} = 0.8$. Come si vede la formazione delle instabilità è totalmente soppressa, anche se permane il mixing in densità dovuto alla diffusione termica.

KH: Diffusione termica di Price senza viscosità artificiale

Come si è già fatto per il test di Sod, in Sez. 3.3.4, si simula anche il test multifase usando la diffusione termica di Price, ma senza alcun tipo di viscosità artificiale. In figura (3.24) viene presentata l'evoluzione delle mappe di densità dei due fluidi a quattro diversi tempi. Come si può vedere la formazione delle instabilità avviene nei tempi giusti. Infatti, a $t = 4$ l'instabilità è presente e con la corretta forma a vortice. Andando avanti con l'evoluzione però, si vede che l'instabilità, una volta formata, non rimane chiusa su sé stessa, ma viene trasportata via dal flusso del secondo fluido. Tale fenomeno avviene perché la presenza di una diffusione termica da sola non sopperisce alla mancanza della viscosità artificiale. La mancanza della viscosità non permette al codice di catturare l'instabilità, e quindi il vortice invece di continuare ad avvolgersi su sé stesso viene allungato e portato via dal flusso del secondo fluido. Tale fenomeno diminuisce l'effetto di mescolamento fra i due fluidi dovuto alla formazione delle instabilità di KH. Anche nella versione con viscosità minima e dipendente dal tempo il vortice tende ad allungarsi, ma esso rimane molto più vicino alla zona centrale contribuendo a mescolare i fluidi nella zona di contatto.

In conclusione per un corretto sviluppo delle instabilità di KH si ha bisogno di una viscosità artificiale che sia il più possibile limitata alla zona dello shock e che parta da valori bassi in modo da non inibire la crescita delle instabilità. Inoltre si ha bisogno di una diffusione termica costruita anche in modo da eliminare l'artefatto in pressione presente nelle zone di discontinuità di contatto. Come si è visto è fondamentale la presenza simultanea di entrambe queste modifiche alla formulazione SPH standard.

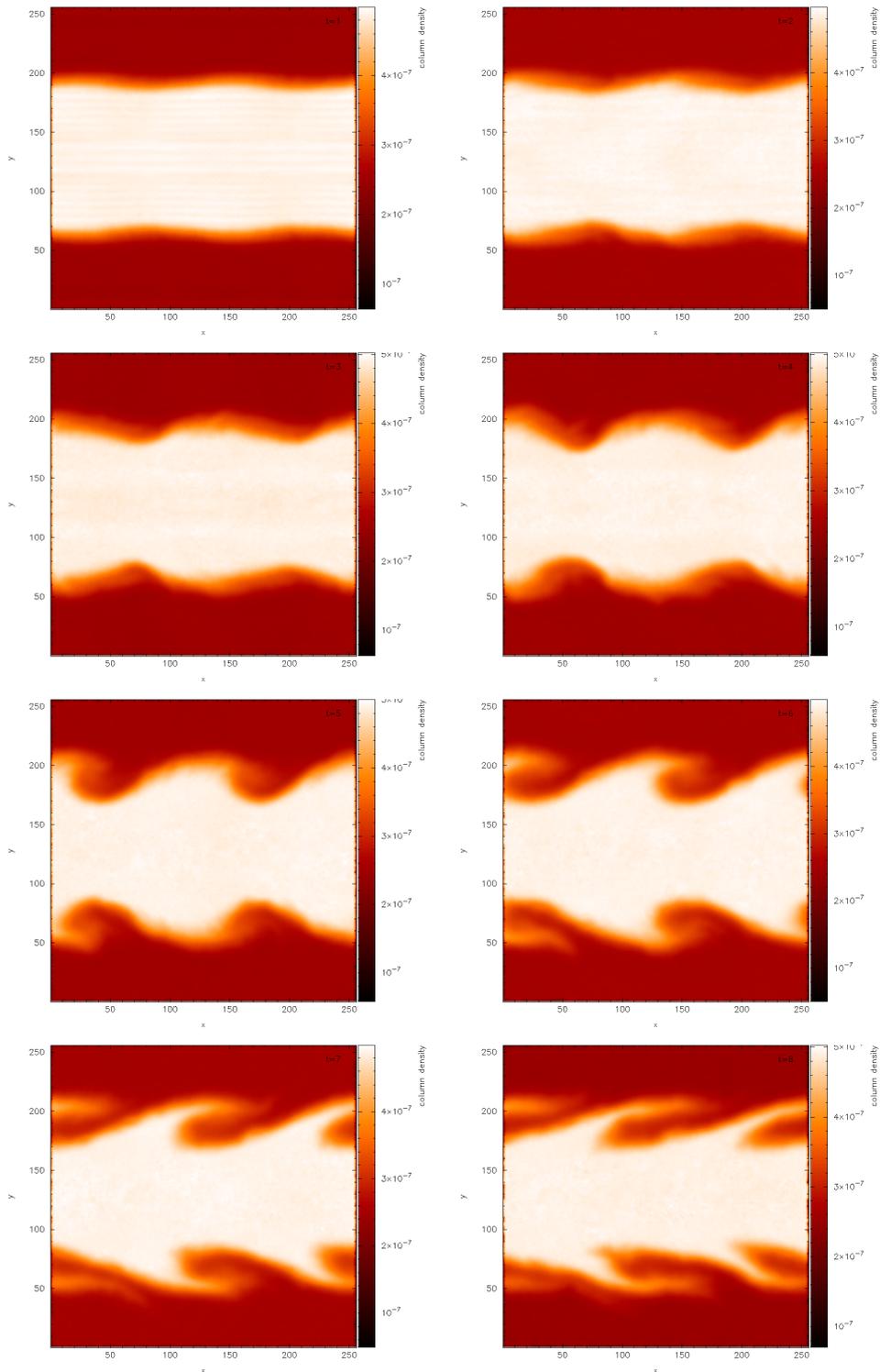


Figura 3.22: KH test. Diffusione termica di Price e una viscosità artificiale dipendente dal tempo come presentata in Sez. 2.1.7 ma partendo dal valore minimo per il parametro $\alpha_{init} = \alpha_{min} = 0.01$. Evoluzione delle mappe di densità dei due fluidi a quattro diversi tempi. Nel riquadro in alto a sinistra a mappa di densità a tempo del codice $t = 2$. In alto a destra mappa di densità a tempo del codice $t = 4$, tempo tipico di formazione di instabilità di KH a lunghezza d'onda $128kpc$. In basso a sinistra a $t = 6$. In basso a destra a $t = 8$.

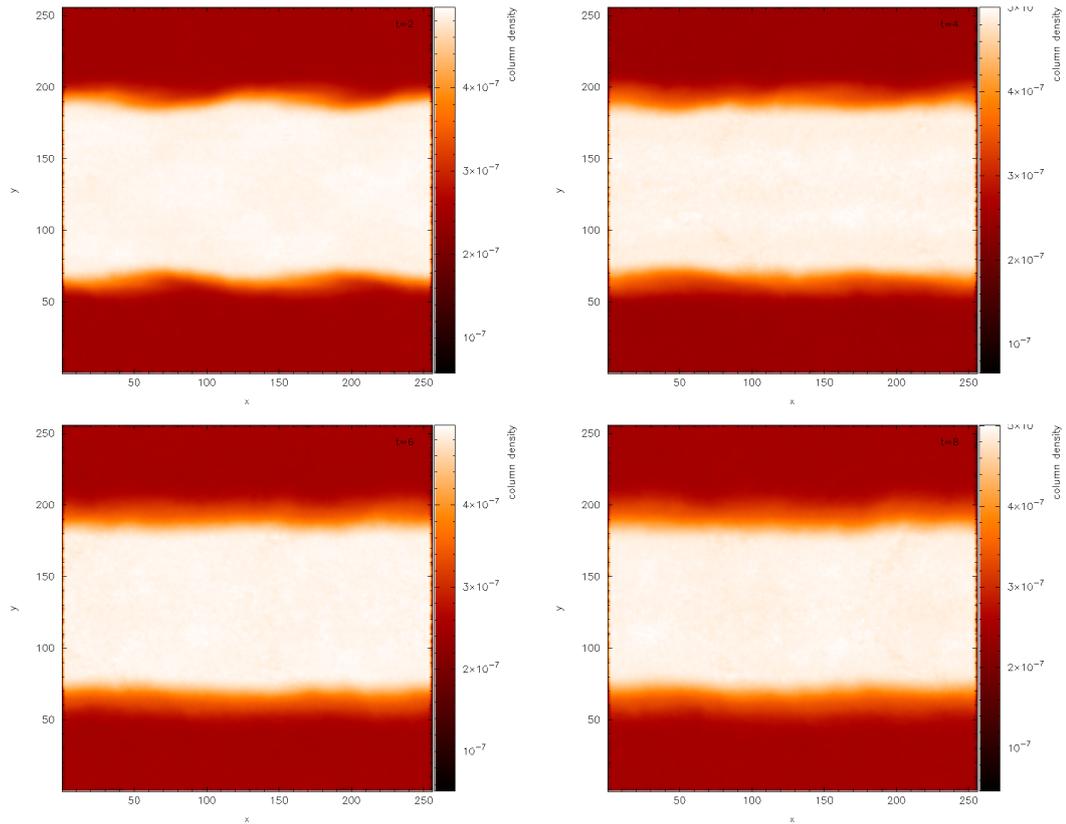


Figura 3.23: Diffusione termica di Price e una viscosità artificiale dipendente dal tempo come presentata in Sez. 2.1.7 ma partendo da un valore massimo per il parametro $\alpha_{init} = \alpha_{max} = 0.8$. Evoluzione delle mappe di densità dei due fluidi a quattro diversi tempi. Nel riquadro in alto a sinistra a mappa di densità a tempo del codice $t = 2$. In alto a destra mappa di densità a tempo del codice $t = 4$, tempo tipico di formazione di instabilità di KH a lunghezza d'onda $128kpc$. In basso a sinistra a $t = 6$. In basso a destra a $t = 8$.

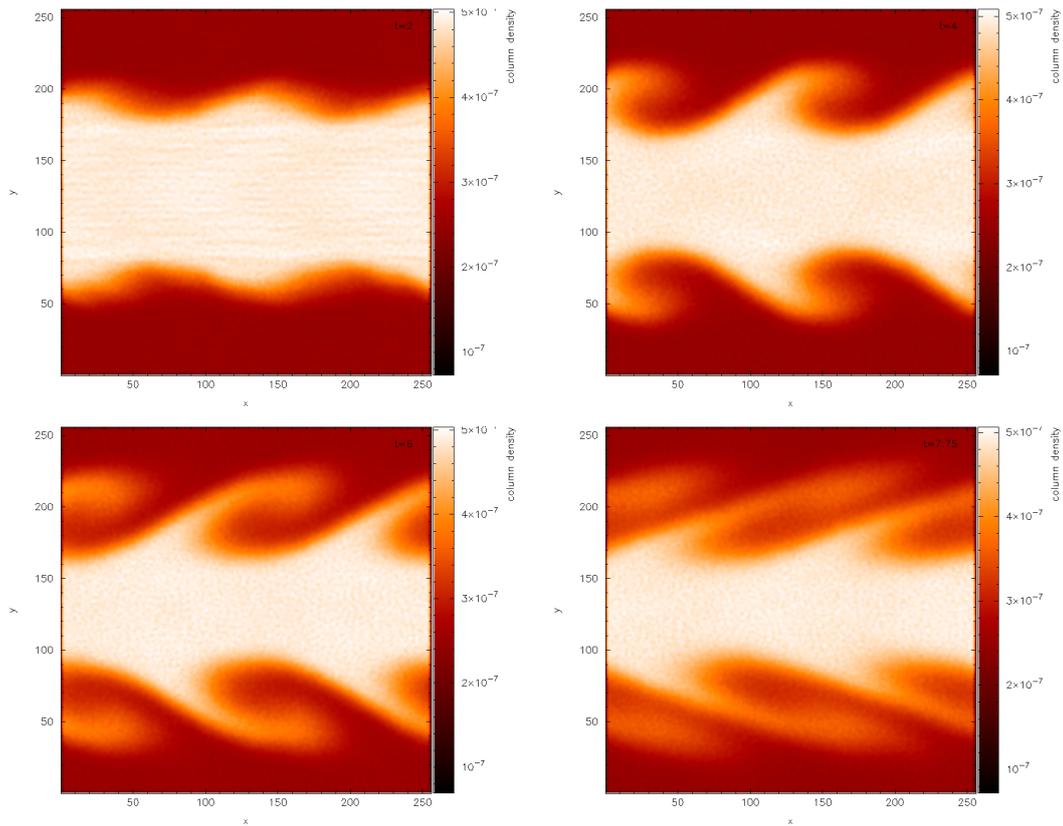


Figura 3.24: Diffusione termica di Price senza viscosità artificiale. KH test. Evoluzione delle mappe di densità dei due fluidi a quattro diversi tempi. Nel riquadro in alto a sinistra a mappa di densità a tempo del codice $t = 2$. In alto a destra mappa di densità a tempo del codice $t = 4$, tempo tipico di formazione di instabilità di KH a lunghezza d'onda $128kpc$. In basso a sinistra a $t = 6$. In basso a destra a $t = 8$.

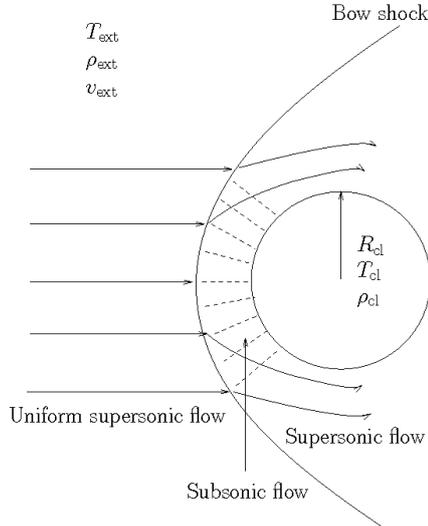


Figura 3.25: Rappresentazione schematica del Wengen Blob test. Il due fluidi sono inizialmente in equilibrio di pressione. Durante l'evoluzione la bolla viene accelerata dal fluido esterno con un flusso supersonico che crea un arco di shock di fronte alla bolla. Quindi il fluido davanti alla bolla, nella regione dopo lo shock, ha un flusso subsonico che ridiventa supersonico venendo accelerato e fluendo ai lati della bolla stessa.

3.3.9 Blob Test

Il blob test è un test idrodinamico su cui vengono confrontati i codici di simulazione cosmologici. È lo stesso test usato da Agertz per il confronto fra codici Euleriani e codici Lagrangiani nello sviluppo di instabilità idrodinamiche [6].

Il test è costruito in modo che una bolla sferica di gas di densità uniforme in equilibrio di pressione con l'ambiente, sia immersa in un fluido di densità dieci volte minore ma più caldo, in movimento verso destra. La bolla verrà accelerata dal fluido e si creeranno delle instabilità idrodinamiche di Kelvin-Helmholtz e di Rayleigh-Taylor che tenderanno a distruggere la bolla.

Condizioni iniziali del Blob Test

Il test viene eseguito in una scatola rettangolare di dimensione $(L_x, L_y, L_z) = (2, 2, 8)Mpc$ dove la bolla si trova inizialmente nella posizione $(0, 0, -3)Mpc$, con un raggio $R_{blob} = 197 Kpc$. La densità interna della bolla è dieci volte superiore a quella esterna ma la sua temperatura è 10 volte minore in modo da garantire l'equilibrio in pressione. Il fluido esterno ha una velocità $v = 1000 km s^{-1}$. Il fluido è un gas ideale con un indice politropico $\gamma = 5/3$ in Eq. (2.42). Il numero

totale di punti interpolanti, e quindi particelle SPH usate è $\sim 10^7$, e il numero di vicini usati è 50. Riassumendo:

$$\begin{aligned}
 T_{ext} &= 10^6 K \\
 \rho_{ext} &= 3.13 \times 10^{-8} \\
 v_{ext} &= 1000 \text{ Km/s} \\
 T_{cl} &= 10^5 K \\
 \rho_{cl} &= 3.13 \times 10^{-7} \\
 R_{cl} &= 197 \text{ Kpc}
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

In figura 3.26 è mostrata la mappa di densità al tempo iniziale del Blob test, per una sezione ad ascissa $x_{sec} = \frac{L_x}{2}$. Si vede la bolla sferica a densità maggiore immersa in un fluido a densità minore. Durante l'evoluzione del sistema la bolla verrà accelerata dal fluido esterno e perderà la sua sfericità, venendo essa schiacciata dalla pressione esercitata dal fluido esterno in movimento. Nei tempi successivi si formerà un arco dovuto a quella parte del fluido esterno che verrà deviato dalla presenza della bolla. Nelle regioni fra l'arco di materia e la bolla si creerà una zona di discontinuità fra fasi diverse del fluido. In questa zona si formeranno delle instabilità idrodinamiche di KH che favoriranno il mescolamento della bolla con l'esterno.

In questo test la bolla è inizialmente in quiete. Una volta lasciato evolvere il sistema essa viene accelerata dal flusso esterno di gas, essa tenderà a comprimersi e si creerà un flusso di gas ai lati della bolla. Per il teorema di Bernulli la pressione ai lati della bolla sarà minore della pressione interna che inoltre verrà compressa dal fluido esterno. Questa differenza in pressione tenderà a spillare materia dalla bolla disperdendola nel fluido esterno. Si può calcolare il tempo tipico di formazione dello shock fra la nube e il fluido esterno, tale shock assume la tipica forma ad arco. Tale tempo τ_{cr} detto di *crushing*, fornisce il tempo scala di questo effetto e sarà calcolato come:

$$\tau_{cr} = \frac{2R_{cl}(\frac{\rho_{cl}}{\rho_{ext}})^{1/2}}{v_1},
 \tag{3.29}$$

che in questo test è di $\tau_{cr} = 0.61 \text{ Gyr}$. Questo effetto è detto di *stripping* di materia.

Instabilità di Rayleigh-Taylor

L'instabilità di Rayleigh-Taylor si crea quando un fluido più denso viene accelerato da un fluido meno denso. In questo test la bolla viene accelerata dal fluido esterno e quindi ci si aspetta la formazione di instabilità di questo tipo. Seguendo la trattazione presentata in Chandrasekar nel 1961 la relazione di dispersione è:

$$|w^2| = k'a \left(\frac{\rho_{cl} - \rho_{ext}}{\rho_{cl} + \rho_{ext}} \right).
 \tag{3.30}$$

Essendo che per questo tipo di instabilità si ha in una geometria tridimensionale, la frequenza spaziale è una quantità vettoriale $\vec{k}' = (k_1, k_2)$ a due componenti perchè è bidimensionale la sezione d'urto fra il fluido e la nube, quindi $k' = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. L'accelerazione a è stimata come una frazione dell'accelerazione della nube $a = \epsilon a_{cl}$, dove solitamente si fissa $\epsilon = 1$ in modo da ottenere un limite inferiore al τ_{RT} . L'accelerazione della nube può essere stimata usando la formula:

$$a_{cl} \sim \dot{v}_1 \sim \frac{\rho_{ext} \pi R_{cl}^2 v_1^2}{M_{cl}}, \quad (3.31)$$

dove si ipotizza che tutta la superficie della nube risenta in modo uniforme della spinta esercitata dal flusso esterno di gas. Questo implica che tutto il cilindro di fronte alla nube trasferisce momento alla nube stessa.

Soluzione attesa

Non esiste per questo test una completa descrizione analitica. Si può però calcolare i tempi caratteristici di crescita delle perturbazioni per i due tipi di instabilità di Kelvin-Helmholtz e di Rayleigh-Taylor, confrontandoli con il tempo caratteristico di formazione dello shock, τ_{cr} Eq. (3.31), che fornisce il tempo scala per lo *stripping* di materia. Il tempo calcolato con la formula per il τ_{KH} in Eq. (3.25) per la lunghezza d'onda relative al raggio della bolla R_{cl} è $0.97Gyr$. Per quanto riguarda l'instabilità di Rayleigh-Taylor si trova che $\tau_{KH} < \tau_{RT}$.

Quindi la relazione fra i tre tempi caratteristici sarà:

$$\tau_{cr} < \tau_{KH} < \tau_{RT} \quad (3.32)$$

I primi modi a crescere sono quelli più piccoli dato che la formula del τ_{KH} dipende inversamente dalla frequenza spaziale del modo, ma si stabilisce che il tempo di distruzione della bolla sia due volte il tempo di crescita del modo a lunghezza d'onda più lunga. Quindi, come descritto da Agertz et al., il tempo di distruzione della bolla è approssimativamente $2Gyr$.

Quindi quello che ci aspettiamo è che la bolla cominci a perdere massa per un effetto di *stripping* praticamente da subito essendo $\tau_{cr} = 0.61Gyr$. Dopo un tempo dell'ordine di τ_{KH} ci si aspetta che l'effetto di mescolamento dovuto alla formazione delle instabilità di Kelvin-Helmholtz diventi importante e la bolla cominci a perdere efficacemente massa. Infine l'ultimo effetto a comparire è l'instabilità di Rayleigh-Taylor che tenderà a dividere la nube in due parti e a favorire ulteriormente il mescolamento.

3.3.10 Risultati del Blob test

In figura 3.27 possiamo vedere come si comportano le tre versioni del codice nella simulazione di questo test. Quello che viene graficato è la mappa della densità di una sezione centrale della box a vari tempi durante l'evoluzione.

Usando la versione Traditional SPH la bolla cambia solo al sua forma ma non si mescola con l'ambiente circostante, infatti, si allunga e si deforma a causa della pressione esercitata dal fluido che la accelera ma rimane con la stessa sovradenasità che aveva all'inizio. E' comunque presente un effetto di *stripping* di materia sui lati della bolla.

Con la versione del codice che implementa la diffusione termica di Wadsley si vede che non c'è un vero mixing della bolla dovuto alla formazione delle instabilità Kelvin-Helmholtz. Infatti il comportamento è simile alla versione Traditional del codice fino a $4Gyr$, quando si nota che la bolla inizia a dividersi in due parti, effetto dovuto ad una migliore descrizione dell'instabilità di Rayleigh-Taylor.

Con la diffusione termica di Price con viscosità artificiale dipendente dal tempo come presentata in Sez. 3.2.1 si vede subito un diverso comportamento rispetto agli altri due codici. Infatti la diffusione diventa subito importante e la bolla si mescola con l'ambiente già dopo $4Gyr$. Inoltre anche in questa versione del codice si riesce a catturare l'instabilità di Rayleigh-Taylor come testimoniato dal fatto che la bolla si separa in due parti.

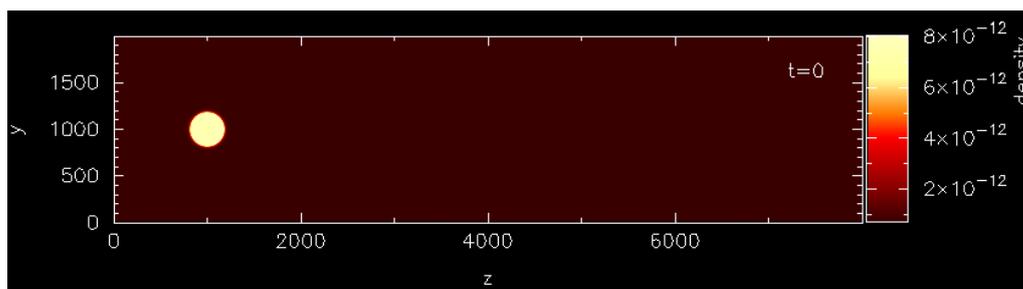


Figura 3.26: Condizioni iniziali del Blob test, rappresentate in mappa di densità. Figura realizzata con il software SPLASH [42]

Un altro modo per confrontare i risultati di questo test è quello presentato in figura 3.28, dove si grafica la frazione di massa della bolla al tempo t rispetto alla massa iniziale della bolla, durante l'evoluzione del sistema con le tre diverse implementazioni usate. Nella stessa figura è presentato il grafico tratto da Agertz et al. dove si confrontano direttamente i risultati di un codice Euleriano e di un codice Lagrangiano [6].

Per calcolare la massa della bolla si è sommato, ad ogni tempo, tutte le particelle di gas con densità $\rho > 0.67 \rho_{cl}$ e temperatura $T < 0.9 T_{ext}$ esattamente come discusso in Agertz et al. [6].

Analizzando il grafico si vede che la perdita di massa è molto simile per la versione Traditional SPH e la versione con la diffusione termica di Wadsley.

Diverso è il discorso con l'implementazione di Price. Nel breve periodo sembra che il mescolamento sia sovrastimato a causa di un effetto di diffusione sommato

ad un effetto di *stripping*. Nel lungo periodo invece il comportamento è molto simile a quello dei codici Euleriani. Nei codici Euleriani la perdita di massa è dovuta principalmente alla formazione delle instabilità di KH che mescolano il fluido della bolla con quello meno denso dell'ambiente. Dato che per la formulazione delle instabilità di KH deve passare un tempo almeno di un τ_{KH} , questo mescolamento non si instaura subito. Infatti si vede che all'incirca dopo $2Gyr$ la perdita di massa comincia a diventare importante e si discosta da quella simulata con un codice Lagrangiano, dove le instabilità di KH sono fortemente soppresse. Questa differenza è dovuta al fatto che con versione del codice con la correzione di Price, la diffusione è legata all'accensione della viscosità artificiale in presenza di fluidi convergenti e non all'instaurarsi delle instabilità idrodinamiche, che invece vengono simulate più correttamente nei codici Euleriani.

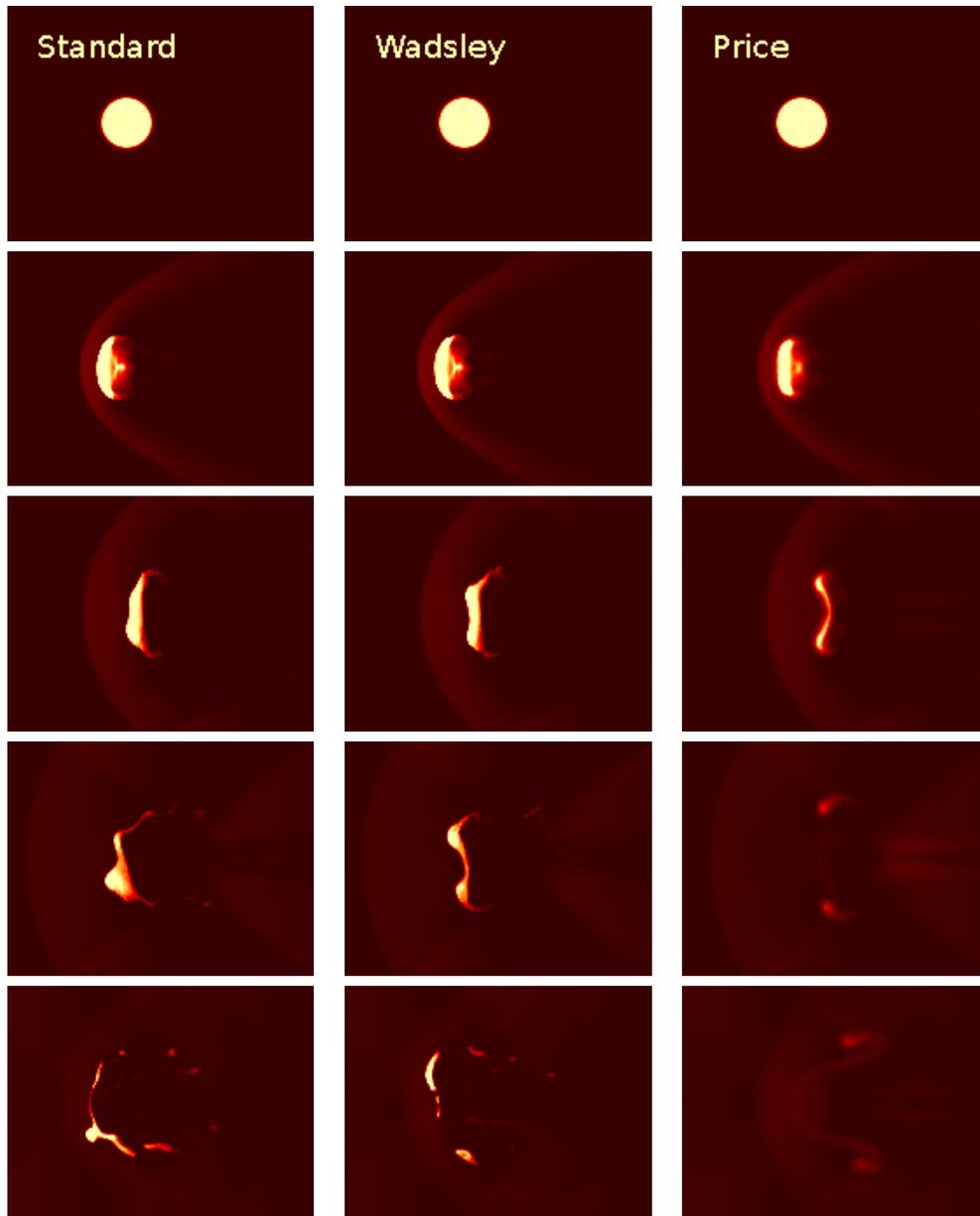


Figura 3.27: Mappe di densità di una sezione del Blob test a cinque diversi tempi $t = 0$ Gyr, $t = 2$ Gyr, $t = 4$ Gyr, $t = 6$ Gyr, $t = 8$ Gyr, confronto tre implementazioni Traditional SPH (sinistra), Wadsley (in mezzo), Price (a destra). Figure realizzate con il software SPLASH [42]

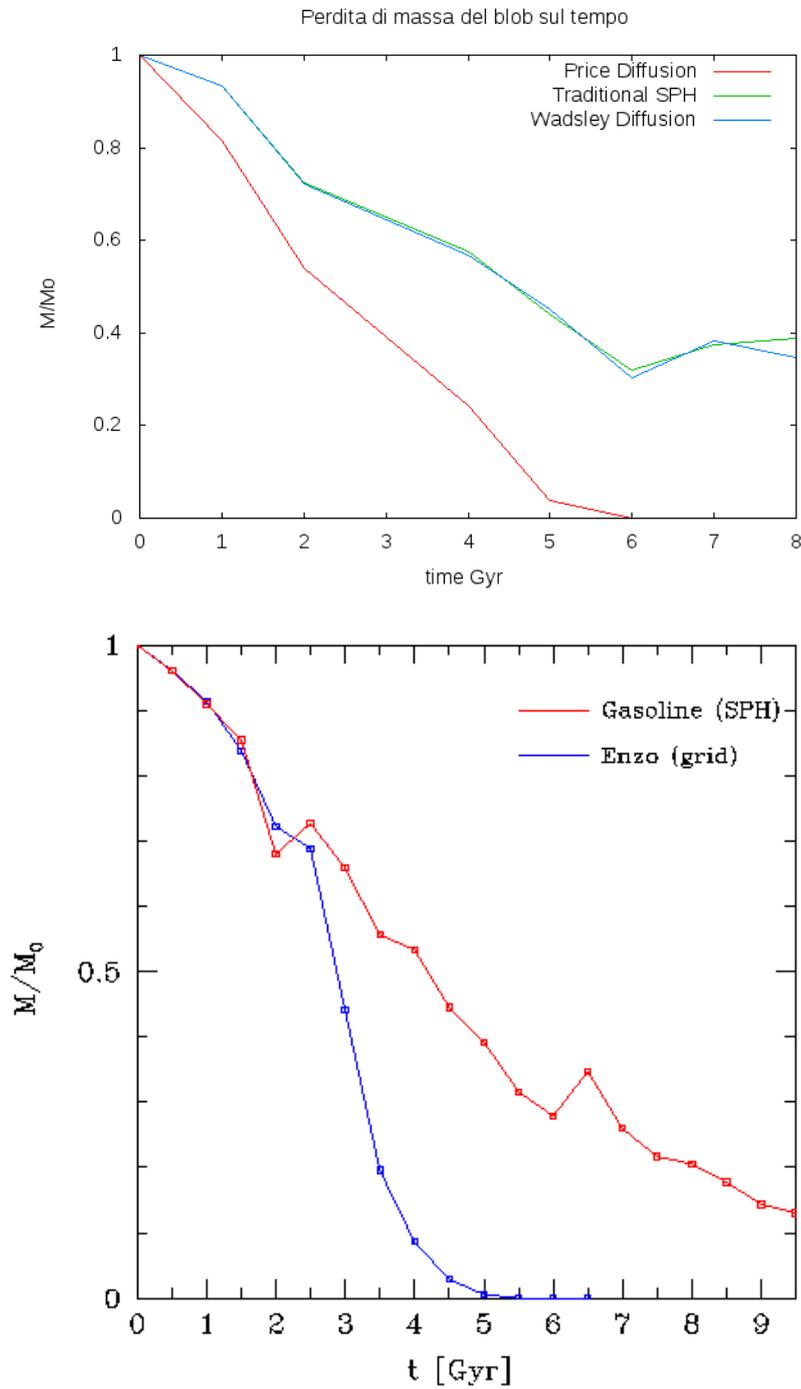


Figura 3.28: A sinistra il grafico della frazione di massa della bolla al tempo t rispetto alla massa iniziale della bolla, durante l'evoluzione del sistema con tre diverse implementazioni usate. a destra lo stesso grafico ma usando un codice Euleriano e un codice Lagrangiano standard, da Agertz 2007 [6]

3.4 Conclusioni

3.4.1 Discussione dei risultati

La domanda a cui si voleva rispondere in questo capitolo era se è possibile migliorare la simulazione delle instabilità idrodinamiche solamente aggiungendo piccole modifiche allo schema SPH.

Da quanto emerso dall'analisi fatta nelle sezioni precedenti, la risposta a questo quesito è affermativa. Infatti due sono le modifiche che, usate congiuntamente, ci permettono di migliorare la simulazione delle instabilità.

La prima modifica è rappresentata dall'implementazione di una diffusione termica dovuta alla turbolenza, con la formulazione presentata da Price [11]. Tale modifica elimina l'artefatto in pressione presente nelle discontinuità di contatto favorendo un mixing migliore del fluido. Inoltre la diffusione termica così formulata riproduce la formazione e la crescita delle instabilità di Kelvin-Helmholtz.

La seconda modifica è l'uso di una viscosità artificiale dipendente dal tempo, come presentata in Sez. 2.1.7, partendo dal valore minimo per il parametro $\alpha_{init} = \alpha_{min}$. Tale formulazione della viscosità è sufficiente per la cattura degli shock idrodinamici, ma al contempo non sopprime in modo spurio la crescita delle instabilità idrodinamiche. Questo perchè l'azione della viscosità è spazialmente limitata alla zona di shock e temporalmente limitata al periodo temporale in cui avviene lo shock.

In conclusione per simulare più efficacemente la formazione delle instabilità idrodinamiche si ha bisogno sia di una diffusione termica, sia di una viscosità artificiale il più possibile limitata alla zona interessata dallo shock.

3.4.2 Sviluppi futuri

La logica continuazione di questo lavoro è l'applicazione di tali risultati a delle simulazioni cosmologiche. Si tratta di capire come queste modifiche influiscano nella simulazione di eventi astrofisici, come per esempio il Santa Barbara Cluster test, presentato in Sez. 2.3.2.

Quindi il prossimo passo è una generalizzazione dell'implementazione di Price che possa essere usata anche con la gravità in modo da stabilire quanto questo effetto di mixing possa influenzare la simulazione di eventi cosmologici e non solo idrodinamici.

L'implementazione di Price però non è immediatamente adattabile ad uno scenario cosmologico. Questo perchè la formula per v_{sig}^u , in Eq. (3.17), dipende dalla differenza di pressione. Quando non è presente l'azione della gravità tale differenza in pressione dipende solamente dallo stato termodinamico del gas e dalla presenza degli shock idrodinamici. In presenza di un gradiente del potenziale gravitazionale la differenza in pressione può instaurarsi per raggiungere la condizione di equilibrio idrostatico. Quindi per adattare questa formula al caso cosmologico bisogna trovare il modo di separare tali due effetti, la differenza

in pressione da shock idrodinamici e la differenza di pressione dovuta al campo gravitazionale.

3.4.3 Ulteriori considerazioni

Un diverso approccio al problema della formazione delle instabilità di Kelvin Helmholtz è quello presentato in Read et al. [8]. In questo lavoro si introduce una nuova formulazione per la stima della densità, diversa da quella vista nel precedente capitolo, Eq.(2.7), usando inoltre una diversa funzione di kernel. Tale modifica è molto più profonda di quelle presentate in questo lavoro di tesi. Non si tratta, infatti, di migliorare solo il calcolo della variazione di energia dovuta alla diffusione, bensì di ripensare a come viene fatto il calcolo della densità. Inoltre si cambia la funzione di kernel da usare, in modo da migliorare il calcolo dei gradienti fra le diverse fasi di un fluido.

Tale approccio cerca di risolvere il problema partendo dalla causa. Il non corretto trattamento dei gradienti tra fasi diverse dei fluidi non permette alle instabilità idrodinamiche di svilupparsi. Se si corregge il trattamento dei gradienti nella formulazione SPH si potrà avere anche una corretta simulazione delle instabilità, con tutto ciò che comporta.

Un fattore importante di cui tenere conto è l'incremento di tempo di calcolo dovuto alle modifiche che si apportano allo schema SPH standard. Infatti in una simulazione cosmologica si presta molta attenzione a come il tempo di calcolo viene usato. Tali simulazioni possono impiegare anche mesi per essere completate, risulta quindi fondamentale che un incremento sostanziale del tempo di calcolo corrisponda a un incremento sostanziale della capacità del codice di simulare gli eventi astrofisici.

Nel problema preso in esame in questo capitolo è difficile stabilire a priori come la mancata simulazione della turbolenza influirà su simulazioni di formazione galattica o cosmologica. In tali simulazioni, infatti, i processi fisici in gioco sono molteplici e non è banale stabilire come l'interazione di questi processi venga alterata dall'aggiunta di variazioni allo schema standard. Quindi l'idea di fondo è che, dato un problema noto, si deve cercare di risolverlo nel modo che ci garantisca il miglior rapporto costo-beneficio. Si deve inoltre verificare quanto tale cambiamento migliora le simulazioni astrofisiche. Infine se tale cambiamento produce conseguenze importanti, si potranno cercare metodi più raffinati per risolvere il problema di partenza.

Quindi bisogna saper trovare la soluzione che produca i miglioramenti più significativi senza aumentare troppo il tempo di calcolo e la complessità degli algoritmi usati.

Da questo punto di vista la soluzione presentata in questo capitolo produce un miglioramento nelle simulazioni delle instabilità, senza sostanziali modifiche allo schema SPH. Per la diffusione termica di Wadsley l'incremento medio in tempo computazionale rispetto alla versione standard è di circa il 6%. Per la diffusione termica di Price invece l'incremento medio in tempo computazionale è di circa

un fattore due rispetto alla versione che implementa una viscosità dipendente dal tempo. Nessuno dei due codici però è ottimizzato e ci si aspetta una diminuzione del tempo di calcolo tramite un'ottimizzazione del codice. Questi tempi sono indicativi ma non vanno tradotti in un incremento computazionale diretto in una simulazione cosmologica. Nelle simulazioni cosmologiche il tempo computazionale è speso anche per i calcoli gravitazionali, il tempo di calcolo per l'idrodinamica rappresenta solo una parte, in media circa la metà, del tempo di calcolo totale. Inoltre i test analizzati descrivono delle configurazioni dove la diffusione termica ha un ruolo fondamentale ma non rappresentano la norma per i calcoli fluidodinamici in una simulazione cosmologica. Quindi l'incremento del tempo di calcolo è ragionevole anche per la diffusione termica di Price considerando il miglioramento apportato alla simulazione delle instabilità idrodinamiche.

Capitolo 4

La diffusione chimica in SPH

In astrofisica vengono chiamati col termine generico di *metalli*, tutti gli elementi che non sono idrogeno ed elio. Con il termine *evoluzione chimica* si intende l'insieme dei processi che alterano l'abbondanza dei metalli nel gas barionico diffuso. L'abbondanza di metalli è il rapporto di massa in elementi più pesanti dell'elio, sulla massa barionica totale.

La composizione chimica, e quindi l'abbondanza in metalli della componente barionica, non rimane immutata nel tempo. La composizione primordiale del gas è determinata dalla nucleosintesi avvenuta durante i primi tre minuti del Big Bang, ma durante l'evoluzione dell'universo vari fenomeni astrofisici modificano la quantità e il tipo di elementi presenti nel gas. Le principali responsabili della produzione di elementi sono le stelle, che tramite processi di fusione creano nuovi elementi che poi vengono ridistribuiti nel mezzo interstellare tramite venti stellari, nebulose planetarie o con la morte esplosiva della stella, la supernova.

Non solo la produzione di elementi è importante, ma lo è anche la successiva diffusione del mezzo interstellare. Infatti l'abbondanza di metalli presente nel mezzo interstellare è particolarmente importante perché determina la velocità con cui esso si raffredda. Un gas più ricco di metalli, infatti, tende a raffreddarsi prima, dato che gli elementi più pesanti dell'idrogeno possono perdere energia termica per emissione di radiazione elettromagnetica più facilmente, avendo più stati energetici accessibili. La temperatura del gas, a sua volta, è importante perché influenza la formazione stellare, in quanto le stelle si formano in presenza di gas freddo e denso. Inoltre le stelle hanno una metallicità che è approssimativamente la stessa del gas dal quale si formano. Quindi è importante nelle simulazioni stimare la corretta abbondanza dei diversi elementi nel gas.

Allo stato attuale la maggior parte dei codici cosmologici si occupano della formazione di metalli, ma non tutti ne seguono la diffusione. In particolare nei codici Lagrangiani SPH questi metalli rimangono nelle particelle nel quale sono stati ridistribuiti alla loro creazione, senza successivamente mescolarsi o diffondersi nel mezzo esterno.

In uno schema Euleriano la diffusione chimica può essere implementata legan-

do la variazione di abbondanza al flusso del gas attraverso la cella nel quale sono presenti i metalli. Purtroppo uno degli inconvenienti di uno schema Euleriano è la presenza di una diffusione numerica difficilmente controllabile [23]. Quindi in questo schema la diffusione chimica è di facile implementazione ma soffre di un errore numerico difficilmente quantificabile.

In uno schema Lagrangiano SPH modellare la diffusione chimica può risultare più complesso in quanto i metalli rimangono vincolati alla particella nella quale sono stati prodotti. Una particella in cui sono stati prodotti dei metalli se spostandosi viene a trovarsi in una zona turbolenta priva di metalli, non redistribuirà elementi chimici alle particelle del mezzo circostante. Quindi serve un modello che permetta agli elementi di diffondersi consistentemente con le condizioni fisiche del gas in cui i metalli si trovano.

Lo scopo di questa seconda parte del lavoro di tesi è implementare un modello di diffusione chimica nel codice Lagrangiano SPH GADGET3. Implementare un modello di diffusione chimica equivale ad implementare una soluzione dell'equazione della diffusione. L'equazione della diffusione descrive, a seconda delle caratteristiche termodinamiche del gas, come i metalli si diffondono nel mezzo.

Il punto di partenza è rappresentato dall'implementazione proposta nel lavoro di Greif [21]. In questo lavoro l'equazione della diffusione è risolta in modo approssimato ed, inoltre, il coefficiente che regola la diffusione è diverso per ogni particella e dipende dalle proprietà locali del gas.

La domanda che ci si pone in questo capitolo è se è possibile, implementando una soluzione approssimata dell'equazione della diffusione, riprodurre in modo realistico un processo di diffusione chimica, almeno in regioni vicine alla particella che diffonde.

Come prima cosa si presenterà in breve l'equazione della diffusione e la sua traduzione in uno schema Lagrangiano SPH. In seguito verrà presentata la soluzione approssimata dell'equazione della diffusione come proposta da Greif [21]. Quindi verranno presentati diversi algoritmi, che implementati in GADGET-3, simulino numericamente la diffusione chimica.

L'affidabilità degli algoritmi verrà verificata usando un semplice test di diffusione in una scatola cubica di gas ideale in quiete. Il risultato numerico verrà poi confrontato con la soluzione analitica col fine di capire quale algoritmo porti ad una soluzione della diffusione più attinente alla soluzione attesa.

Infine si discuteranno gli sviluppi futuri di questa seconda parte del lavoro di tesi.

4.1 Equazione della diffusione

La diffusione gioca un ruolo fondamentale in molti processi astrofisici per esempio nella conduzione termica [24], nel trasferimento di energia nei flussi laminari [20] e nella diffusione di fotoni negli interni stellari[22]. Questi processi sono descritti

dall'equazione della diffusione che si trova normalmente scritta come:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (D \nabla c) , \quad (4.1)$$

dove c è la concentrazione di contaminante per unità di massa, D è il coefficiente di diffusione che può' essere funzione del tempo e dello spazio, e d/dt è la derivata Lagrangiana che permette di descrivere l'evoluzione del fluido lungo il suo moto. Il coefficiente di diffusione D ha le dimensioni $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$, dimensionalmente quindi può' essere visto come il prodotto della densità locale per una lunghezza caratteristica, come il libero cammino medio nel gas, e per una velocità caratteristica, per esempio la dispersione di velocità che regola la diffusione su scale microscopiche.

L'equazione sopra riportata riguarda il comportamento statistico di un numero elevato di particelle che si muovano di moti casuali, in un mezzo dominato dalla viscosità. La funzione $c(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ è interpretabile come la distribuzione che restituisce la probabilità di trovar una particella in un intorno piccolo del punto \mathbf{x} al tempo t .

4.1.1 Equazione della diffusione in schema SPH

Per ottenere la traduzione dell'equazione della diffusione in uno schema Lagrangiano SPH possiamo procedere come già trattato in Sez.2.1.1 e quindi otteniamo:

$$\frac{dc_i}{dt} = \sum_j K_{ij}(c_i - c_j) , \quad (4.2)$$

con

$$K_{ij} = \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \frac{4D_i D_j}{(D_i + D_j)} \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{r_{ij}^2} , \quad (4.3)$$

dove i e j sono gli indici delle particelle, m le masse, ρ le densità, W_{ij} il kernel \mathbf{r}_{ij} , r_{ij} il vettore e lo scalare della separazione delle particelle i e j . La derivazione completa di questa equazione può essere trovata in [26][29]. Il coefficiente di diffusione sarà:

$$D_i = \rho_i \tilde{v} \tilde{l} . \quad (4.4)$$

Il coefficiente D , in uno schema SPH, sarà diverso per ogni particella e dipenderà dalle condizioni termodinamiche locali del gas. Per il calcolo di D bisogna definire una lunghezza caratteristica \tilde{l} e una velocità caratteristica \tilde{v} . Dato che non esiste una definizione standard di diffusione in uno schema SPH, la definizione della velocità e della lunghezza caratteristiche varia a seconda dell'implementazione adottata.

Nel lavoro di Greif la lunghezza caratteristica della diffusione è rappresentata dalla lunghezza di smoothing h che rappresenta la scala più piccola su cui è possibile risolvere la diffusione. La velocità caratteristica è definita come:

$$\tilde{v}_i^2 = \frac{1}{N_{\text{ngb}}} \sum_j |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2 , \quad (4.5)$$

che rappresenta la dispersione di velocità dei vicini SPH della particella che diffonde.

L'equazione per la diffusione, Eq.(4.2), può essere risolta esplicitamente come viene fatto per le altre equazioni SPH come per esempio l'equazione per l'evoluzione del momento, Eq.(2.18). Nella soluzione esplicita il nuovo stato del sistema viene calcolato a partire da quello al tempo precedente. Applicando lo stesso procedimento all'equazione della diffusione si nota che esso implica una doppia sommatoria sui vicini SPH, sia per il calcolo della variazione della concentrazione sia per il calcolo dei coefficienti di diffusione locali. Inoltre nel codice GADGET-3 le particelle hanno un differente tempo di integrazione a seconda delle caratteristiche termodinamiche della porzione di fluido in cui si trovano. Questo fa sì che sia possibile che la variazione di concentrazione di una particella i , dovuta dalla diffusione da una particella j , possa essere calcolata prima che avvenga la conseguente diminuzione della concentrazione a causa della diffusione di j verso i . Il risultato diretto è una non conservazione della massa totale in metalli.

Per evitare tale problema si possono ricalcolare le concentrazioni solamente quando tutte le particelle sono sincronizzate fra loro. Infatti anche se ogni particella viene integrata con un differente intervallo temporale, esistono dei momenti nella simulazione in cui tutte le particelle vengono sincronizzate. Questo vuol dire che esiste un momento nel quale tutte le particelle vengono aggiornate simultaneamente. Oppure, se gli intervalli temporali che intercorrono fra i punti di sincronizzazione fossero troppo lunghi, si può forzare questa sincronizzazione ad intervalli più piccoli. Usando tale soluzione, però, si perderebbe il guadagno in termini di costo computazionale e precisione che deriva dal lasciare che ogni particella venga integrata con il proprio intervallo di integrazione.

4.1.2 Soluzione approssimata dell'equazione della diffusione

Per evitare di risolvere esplicitamente l'equazione della diffusione nella sua rappresentazione SPH, Greif et al. [21] propongono di integrare direttamente l'Eq. (4.2). Inoltre ipotizzano che la densità e l'abbondanza delle particelle, entro la lunghezza di smoothing della particella che diffonde, non varino durante l'intervallo di integrazione. Con queste ipotesi si ottiene che l'abbondanza, dopo un intervallo di integrazione, valga:

$$c_i(t_0 + \Delta t_i) = c_i(t_0)e^{A\Delta t_i} + \frac{B}{A}(1 - e^{A\Delta t_i}), \quad (4.6)$$

con

$$A = \sum_j K_{ij}, \quad (4.7)$$

$$B = \sum_j K_{ij}c_j. \quad (4.8)$$

Greif et al. suggeriscono, inoltre, di calcolare A e B solo nei timestep dove tutte le particelle sono aggiornate in modo da non preoccuparsi della sincronizzazione.

4.2 Risultati

Prima di applicare l'algoritmo di diffusione chimica ad una simulazione cosmologica, si deve verificare l'attendibilità dei risultati da esso prodotti in un semplice problema di diffusione. Il problema preso in esame è la diffusione di un elemento chimico in una scatola cubica piena di gas a densità costante in quiete. Per questo problema è nota la soluzione analitica che verrà confrontata con la soluzione numerica ottenuta dalle simulazioni. Lo scopo è di isolare il più possibile la simulazione della diffusione chimica da altre condizioni che potrebbero alterarne i risultati e quindi non permettere il confronto diretto fra soluzione numerica e soluzione analitica. Inoltre come prima verifica verrà usata una versione semplificata dell'algoritmo di diffusione che ci permetta di capire se l'Eq.(4.11) è una soluzione accettabile dell'equazione della diffusione Eq.(4.2).

4.2.1 Coefficiente di diffusione costante

Per verificare la validità della soluzione approssimata dell'equazione della diffusione, presentata in Sez.4.1.2, si userà un algoritmo semplificato in cui il coefficiente di diffusione è fisso nel tempo e nello spazio ed uguale per ogni particella. In un gas omogeneo, imponendo che il coefficiente di diffusione D sia costante, l'equazione della diffusione diventa:

$$\frac{dc}{dt} = D^* \nabla^2 c \quad (4.9)$$

dove $D^* = \frac{D}{\rho}$ è il coefficiente di diffusione ridotto. Il coefficiente D^* ha le dimensioni di una velocità per una lunghezza caratteristica $[L^2 T^{-1}]$. Quindi, per un gas omogeneo imponendo un coefficiente di diffusione costante, otteniamo che i coefficienti K_{ij} possono essere riscritti come:

$$K_{ij}^* = m_j \frac{2D^*}{\rho_j} \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{r_{ij}^2}, \quad (4.10)$$

dove i e j sono gli indici delle particelle, m le masse, ρ le densità, W_{ij} il kernel, \mathbf{r}_{ij} e r_{ij} il vettore e lo scalare della separazione delle particelle i e j . Quindi l'equazione per l'evoluzione dell'abbondanza resterà espressa come:

$$c_i(t_0 + \Delta t) = c_i(t_0)e^{A\Delta t} + \frac{B}{A}(1 - e^{A\Delta t}), \quad (4.11)$$

con

$$A = \sum_j K_{ij}^*, \quad (4.12)$$

$$B = \sum_j K_{ij}^* c_j. \quad (4.13)$$

Usando tali semplificazioni si possono confrontare direttamente i risultati numerici con la soluzione analitica nel caso di diffusione in un fluido omogeneo.

4.2.2 Condizioni iniziali

Le condizioni iniziali per questo test sono le stesse usate nel lavoro di Greif [21]. Il gas è contenuto in una scatola cubica il cui lato, in unità del codice ha lunghezza unitaria, ed in unità fisiche misura 1 kpc . La scatola contiene un gas ideale in quiete, $v_x = v_y = v_z = 0$, il cui indice politropico, in Eq. (2.42), vale $\gamma = 5/3$. Il gas viene simulato usando un numero totale di punti interpolanti, e quindi particelle SPH pari a 64^3 , e il numero di vicini usati per il calcolo della lunghezza di smoothing è 64. Le particelle sono disposte su una griglia di spaziatura $1/64 L_{box}$ a meno di una piccola deviazione casuale dal vertice della griglia.

Nella scatola è presente un gas ideale formato da una miscela di idrogeno ed elio. Indicando con $X = \frac{M_H}{M_{tot}}$ la frazione in massa di idrogeno e con $Y = \frac{M_{He}}{M_{tot}}$ la frazione in massa di elio, avendo solamente questi due elementi nel nostro gas otteniamo che $X + Y = 1$. La frazione totale in massa di idrogeno è pari a 76% del totale e quindi $X = 0.76$ e $Y = 0.24$. Questa miscela di idrogeno ed elio corrisponde alla miscela di gas di cui era costituito l'universo appena dopo la formazione dei primi elementi e molto prima della comparsa delle stelle.

La densità numerica di atomi di idrogeno è assunta essere $n_H = 1 \text{ cm}^{-3}$. Quindi otteniamo la massa che deve avere ogni singola particella SPH come:

$$m_i = \frac{n_H m_H}{X} \frac{V}{N_{SPH}} \quad (4.14)$$

dove m_i rappresenta la massa di ogni singola particella, m_H la massa del protone, V il volume della simulazione in unità fisiche, e N_{SPH} il numero di particelle SPH della simulazione.

La simulazione viene lasciata evolvere per un tempo pari a 1 in unità del codice, corrispondenti a circa 0.97 Gyr .

Le proprietà termodinamiche del gas sono calcolate in modo da ottenere che un onda di pressione sia in grado di propagarsi da un capo all'altro della scatola durante l'evoluzione completa della simulazione. Quindi il tempo che impiega il segnale a propagarsi nella scatola è pari a $t_{sc} = \frac{L_{box}}{c_s} = 1$. Essendo che la velocità del suono adiabatica, in Eq. (1.7), viene fissata all'unità otteniamo:

$$c_s^{ad} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = 1. \quad (4.15)$$

Quindi utilizzando l'Eq.(1.1) per i gas perfetti otteniamo una temperatura espressa in funzione della velocità del suono:

$$T = \frac{c_s^2}{\gamma n_H k_B} = c_s^2 \frac{m_H \mu}{\gamma \rho k_B} \quad (4.16)$$

dove μ è il peso molecolare medio, che per un gas composto da una miscela di idrogeno ed elio vale:

$$\mu = \frac{M}{N} = \frac{4}{3X + 1} \quad (4.17)$$

dove M è la massa totale del gas, N il numero totale di particelle e X è la frazione in massa di idrogeno. All'istante iniziale tutte le particelle hanno abbondanza nulla, per il generico elemento campione, tranne la particella al centro della scatola che ne è totalmente costituita e quindi la sua abbondanza sarà unitaria.

Il coefficiente di diffusione ridotto per questo test risulta pertanto essere fissato al valore di $D^* = 0.02$.

4.2.3 Soluzione attesa

La soluzione dell'equazione della diffusione è rappresentata dall'integrale della funzione di Green per la distribuzione di concentrazione iniziale. La funzione di Green ci dice come la densità di probabilità del singolo punto evolve nel tempo e nello spazio. Quindi l'evoluzione di qualsiasi distribuzione iniziale di particelle può essere ottenuta aggiungendo l'informazione sulla distribuzione iniziale di probabilità, e quindi la concentrazione al variare del tempo e in ogni punto dello spazio sarà:

$$c(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) c(\mathbf{x}', 0) d\mathbf{x}' \quad (4.18)$$

Nel caso di diffusione in coordinate cartesiane in tre dimensioni, la funzione di Green assume la forma:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(\frac{-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{4Dt}\right) \quad (4.19)$$

che usando delle condizioni iniziali rappresentate da una delta di Dirac $c(\mathbf{x}', 0) = \delta_{Dirac}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ otteniamo che la concentrazione sarà:

$$c(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.20)$$

$$\sigma^2 = 2D^*t \quad (4.21)$$

dove con il vettore \mathbf{x}' si indica la posizione della particella di abbondanza iniziale unitaria, \mathbf{x} è il generico vettore posizione, e σ^2 è la varianza della distribuzione. Questa funzione indica l'abbondanza al tempo t di una porzione di fluido che si trova alla posizione indicata dal vettore \mathbf{x} . In simmetria sferica e fissando l'origine sulla particella di abbondanza iniziale unitaria, diventa:

$$c(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-|\mathbf{r}|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.22)$$

Questa funzione indica l'abbondanza dell'elemento campione ad una distanza r dal centro e al tempo t . All'istante iniziale questa funzione tende ad una delta di Dirac essendo l'abbondanza concentrata in un'unica particella. Durante l'evoluzione del sistema la distribuzione si allarga dato che la varianza dipende linearmente dal tempo. La velocità di allargamento della distribuzione è tanto maggiore tanto più grande è il coefficiente di diffusione D^* .

4.2.4 Algoritmo di diffusione standard

Nell'implementazione standard dell'algoritmo di diffusione, l'abbondanza dell'elemento campione per ogni particella verrà aggiornata ad ogni timestep. L'algoritmo usato è quindi leggermente più sofisticato di quello usato da Greif nel suo lavoro [21], nel quale propone di aggiornare le abbondanze solo nei punti di sincronizzazione delle particelle. In questo caso l'abbondanza verrà aggiornata usando lo stesso intervallo di integrazione idrodinamico.

In figura 4.1 viene presentato il profilo di abbondanza radiale a tre diversi tempi. Il profilo di abbondanza è normalizzato a uno ad ogni tempo, come anche la soluzione analitica. I punti rossi rappresentano i valori di abbondanza di ogni particella rispetto alla distanza relativa dalla particella con abbondanza iniziale unitaria. La linea verde rappresenta la media dell'abbondanza in ogni guscio sferico dei 64 totali. La linea blu rappresenta la soluzione analitica per questo test, ossia l'andamento della funzione in Eq.(4.22) al variare della distanza dal centro e del tempo, con un coefficiente di diffusione fissato a $D^* = 0.02$. Per il grafico in alto il tempo rappresentato è $t = 0.1$, in unità di tempo della simulazione. Per il grafico al centro il tempo rappresentato è $t = 0.5$, quindi a questo tempo il segnale rappresentato dall'onda di pressione ha avuto il tempo, partendo dal centro della scatola, di raggiungerne il bordo. Per il grafico in basso il tempo è $t = 1$, quindi il tempo finale della simulazione.

Si può notare che ad ogni tempo la soluzione numerica risulta in ritardo rispetto alla soluzione analitica. Il risultato è una minore diffusione simulata rispetto a quella attesa.

In figura 4.2 viene presentato il grafico dei profili di abbondanza radiale medi a quattro diversi tempi. Quello che si vede è che la distribuzione in abbondanza, durante l'evoluzione della simulazione, si abbassa e si allarga come ci si aspetta da un fenomeno diffusivo.

A questo punto per capire in che cosa la soluzione simulata differisce da quella aspettata, si eseguirà un fit. Eseguiremo il fit della soluzione numerica con una funzione formulata allo stesso modo della soluzione analitica, ma lasciando come parametro da calcolare tramite il fit, la varianza della distribuzione. Quindi come funzione di fit viene usata:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{Cost}{(2\pi a)^{3/2}} \exp\left(\frac{-|\mathbf{r}|^2}{2a}\right) \quad (4.23)$$

dove $Cost$ è una costante numerica che vale $3.82966 \cdot 10^{-06}$ e che serve ad imporre che la funzione di fit tenda a uno quando il tempo della simulazione tende a zero. Ad ogni intervallo $\Delta t = 0.1$ viene fatto il fit della soluzione numerica media, con la funzione in Eq.(4.23). Il parametro a ottenuto dal fit dovrebbe variare linearmente con il tempo, in quanto rappresenta la varianza della soluzione analitica della diffusione $a(t) = \sigma^2 = 2D^* t$. Al termine della simulazione facendo un fit lineare dei coefficienti a ad ogni tempo, si ottiene una stima del coefficiente numerico di diffusione D^* .

In figura 4.3 viene presentato il fit lineare del parametro a che rappresenta la varianza della funzione di fit al variare del tempo. I punti rossi rappresentano il valore del parametro a rispetto al tempo a cui è stato ottenuto. La line verde rappresenta la funzione lineare fittante, definita come $f(t) = 2D^* t$. Il valore del coefficiente numerico di diffusione così ottenuto è $D_{fit}^* = 0.01116 \pm 0.00002$ da paragonare con il coefficiente di diffusione usato di $D^* = 0.02$. Quindi comportamento della diffusione simulata è consistente con un fenomeno di diffusione con un coefficiente di diffusione di circa la metà.

Come ulteriore prova si eseguiranno i test variando il numero di vicini usati e la risoluzione della simulazione. In figura 4.4 vengono mostrati, in scala logaritmica, i profili di abbondanza radiale medi a tre diversi tempi per tre diverse versioni dell'algoritmo di diffusione. I profili di abbondanza sono normalizzati a uno ad ogni tempo, come anche la soluzione analitica. Per il grafico in alto il tempo rappresentato è $t = 0.1$, per il grafico al centro $t = 0.5$, per il grafico in basso il tempo è $t = 1$. Con **Allstep 64³ 64 vicini SPH** si intende l'algoritmo già presentato in questa sezione dove l'aggiornamento delle abbondanze avviene ad ogni timestep. Con **Allstep 64³ 128 vicini SPH** si intende la stessa versione dell'algoritmo precedente ma usando il doppio numero di vicini SPH. Con **Allstep 128³ 64 vicini SPH** si intende la stessa versione dell'algoritmo precedente ma usando una risoluzione in massa otto volte maggiore e tenendo fisso il numero di vicini SPH.

Come si può vedere cambiando il numero di vicini e la risoluzione non otteniamo una migliore attinenza con la soluzione aspettata. Quello che succede tenendo la risoluzione fissa ed aumentando il numero di vicini SPH è che la lunghezza di smoothing aumenta come aumenta l'intervallo di integrazione. Infatti, aumentando la lunghezza di smoothing, otteniamo delle condizioni iniziali più rilassate essendo il campo di densità convoluto con un Kernel SPH di volume maggiore e questo si traduce in una Condizione di Courant idrodinamica meno stringente. Aumentando la risoluzione della simulazione mantenendo fisso il numero di vicini otteniamo una lunghezza di smoothing più piccola ma mantenendo costante l'intervallo di integrazione usato. Questo produce una velocità di propagazione del segnale $v_{sig}^{diff} = \frac{2h}{\Delta t}$ minore del caso a risoluzione più bassa e di conseguenza una diffusione minore.

Da questi test si conclude che nel caso di diffusione in una scatola cubica, presentato in questo capitolo, la discrepanza fra la soluzione numerica e quella analitica non migliora variando il numero di vicini SPH usati nè dalla risoluzione della simulazione.

Per eseguire questi test non abbiamo fatto nessuna assunzione sulla condizione di Courant che, anzi, è esattamente quella determinata dall'idrodinamica, Sez.2.2.4. L'equazione della diffusione tuttavia, essendo un'equazione differenziale alle derivate parziali, richiede un criterio di Courant che determini la scelta del timestep di integrazione affinché la soluzione risulti stabile.

Non è banale trovare la condizione di Courant per l'equazione della diffusione chimica. Quello che possiamo fare è di imporre un timestep di integrazione più piccolo e vedere se questo migliora la simulazione del processo diffusivo.

4.2.5 Algoritmo di diffusione limitando il timestep

Come ulteriore test per meglio riprodurre la soluzione analitica attesa imporrò che l'intervallo di integrazione in Eq. (2.56) non possa mai essere superiore a $t = 5 \cdot 10^{-4}$ in unità di tempo del codice. Questo vuol dire che l'evoluzione di ogni particella non può essere descritta con meno di $2 \cdot 10^3$ intervalli di integrazione durante la simulazione. Ovviamente questa non è l'implementazione di un criterio di Courant per la diffusione, in quanto il timestep di integrazione è fisso nel tempo e nello spazio e non si adatta alle condizioni della simulazione. Questa modifica serve solo a capire se la causa di una non corretta simulazione della diffusione risiede nella scelta dell'intervallo di integrazione.

In figura 4.5 viene presentato il profilo di abbondanza radiale a tre diversi tempi ottenuto imponendo un limite all'intervallo di integrazione. Il profilo di abbondanza è normalizzato a uno ad ogni tempo, come anche la soluzione analitica. I punti rossi rappresentano i valori di abbondanza di ogni particella rispetto alla distanza relativa dalla particella con abbondanza iniziale unitaria. La linea verde rappresenta la media dell'abbondanza in ogni guscio sferico dei 64 totali. La linea blu rappresenta la soluzione analitica per questo test, ossia l'andamento della funzione in Eq.(4.22), al variare della distanza dal centro e del tempo, con un coefficiente di diffusione fissato a $D^* = 0.02$. Per il grafico in alto il tempo rappresentato è $t = 0.1$, per il grafico al centro $t = 0.5$ ed infine per il grafico in basso il tempo è $t = 1$.

Limitando di molto l'intervallo di integrazione si ottiene una descrizione della diffusione più simile a quella attesa. Infatti ripetendo l'analisi fatta per l'algoritmo standard il coefficiente che otteniamo dal fit è $D_{fit}^* = 0.01827 \pm 0.00003$ che è molto vicino al coefficiente di diffusione atteso di $D^* = 0.02$.

Naturalmente questo incremento della precisione usando un criterio così grossolano è stato ottenuto a scapito di un costo computazionale molto elevato. Infatti usando questa limitazione dell'intervallo di integrazione il numero di intervalli di integrazione necessari all'evoluzione di tutte le particelle aumenta di un fattore ~ 10 , mentre il tempo di calcolo aumenta di un fattore ~ 8 . Tale incremento nel tempo di calcolo non è accettabile per una simulazione cosmologica. Il prossimo passo sarà di cercare una condizione di Courant compatibile con la diffusione chimica e che aumenti l'accuratezza della soluzione senza aumentare troppo il costo computazionale. Questo risultato può essere ottenuto se si riesce a ridurre

l'intervallo di integrazione solo dove necessario usando un criterio adattivo sia spazialmente che temporalmente.

Confrontando questi risultati con quelli mostrati nel lavoro di Greif et al. [21] si vede che limitando l'intervallo di integrazione otteniamo risultati molto simili a quelli presentati nel suddetto lavoro. Anche se in tale lavoro non viene menzionato il grado di accuratezza usato per l'integrazione idrodinamica del sistema. Infatti usando un fattore di Courant idrodinamico molto basso si otterrebbero dei valori per l'intervallo di integrazioni comparabili con quelli usati in quest'ultimo test, ottenendo quindi di conseguenza anche un'accuratezza migliore.

4.2.6 Condizione di Courant per la diffusione chimica

Come discusso, l'uso della stessa condizione di Courant per idrodinamica e diffusione produce dei risultati diversi da quelli attesi. Come discusso nella Sez.2.2.4, il criterio di Courant si basa sul fatto che non si possa integrare un'equazione differenziale con intervalli temporali maggiori di quelli che impiega il segnale a percorrere la lunghezza caratteristica della risoluzione della simulazione. La lunghezza caratteristica della risoluzione è rappresentata, in uno schema SPH, da due volte la lunghezza di smoothing della particella, che può essere considerata il limite di risoluzione spaziale. La velocità di propagazione del segnale per la diffusione chimica è difficilmente definibile. Una prima stima della velocità di diffusione può essere il prodotto del coefficiente di diffusione ridotto per la lunghezza di smoothing:

$$v_{diff} = \frac{D^*}{h}. \quad (4.24)$$

Infatti, essendo che il coefficiente di diffusione ridotto ha le dimensioni di $[L^2 T^{-1}]$, dividendolo per una lunghezza ottenimo una velocità caratteristica. Quindi il limite massimo dell'intervallo di integrazione diventa:

$$\Delta t < C_{Courant}^{diff} \frac{2h^2}{D^*} \quad (4.25)$$

con $C_{Courant}^{diff}$ un coefficiente numerico per rendere questa condizione ancora più stringente. Purtroppo a meno di non imporre un valore di $C_{Courant}^{diff}$ molto piccolo, la condizione di Courant così formulata non è quasi mai più vincolante di quella idrodinamica. Quindi questa scelta del criterio di Courant non riesce a limitare efficacemente l'intervallo di integrazione. Inoltre non è un criterio spazialmente adattivo, essendo la lunghezza di smoothing, in questo caso, praticamente uguale ovunque.

Un altro modo per definire una velocità di propagazione è di usare il gradiente dell'abbondanza normalizzato arrivando ad una velocità di diffusione così formulata:

$$v_{diff} = D^* \frac{|\nabla c|}{\bar{c}}, \quad (4.26)$$

dove \bar{c} è la media delle abbondanze fra i vicini SPH della particella di cui si sta calcolando l'intervallo di integrazione. Moltiplicando il coefficiente di diffusione per il gradiente dell'abbondanza, $[L^{-1}]$, si ottiene dimensionalmente una velocità. Inoltre è fisicamente ragionevole che in presenza di un gradiente elevato di abbondanza, la velocità di diffusione aumenti. In aggiunta, normalizzando con il valore in abbondanza locale, si evitano forti gradienti dove si è in presenza di particelle con abbondanza nulla vicine a particelle che presentano un'abbondanza non nulla. In questo caso infatti si otterrebbe un elevato gradiente di abbondanza e quindi un intervallo di integrazione troppo ridotto. L'uso del gradiente normalizzato è fisicamente motivato dal fatto che la velocità di diffusione dipende dalla variazione relativa di abbondanza fra porzioni vicine di fluido. Il criterio di limitazione dell'intervallo di integrazione diventa:

$$\Delta t < C_{Courant}^{diff} \frac{2h\bar{c}}{D^* |\nabla c|} \quad (4.27)$$

Inoltre, come ulteriore condizione, si richiede che l'intervallo di integrazione non possa essere minore di un valore minimo fissato, e quindi:

$$\Delta t_{diff} = \text{Max}(\Delta t_{min}^{diff}, \Delta t_{diff}). \quad (4.28)$$

Il valore minimo del timestep viene fissato in modo che l'intervallo di integrazione non possa diventare indefinitamente piccolo e quindi incrementare eccessivamente il costo computazionale.

Questa condizione di Courant aggiuntiva sul timestep implica che il tempo di integrazione minore, ottenuto confrontando le condizioni di Courant per l'idrodinamica e la diffusione, diventi l'intervallo di integrazione per la particella e quindi:

$$\Delta t = \text{min}(\Delta t_{idro}, \Delta t_{diff}). \quad (4.29)$$

4.2.7 Algoritmo di diffusione con condizione di Courant

Dato che la scelta dell'intervallo di integrazione riveste un ruolo importante nella simulazione della diffusione, andremo a modificare l'algoritmo usato includendo una condizione di Courant sulla diffusione e un intervallo di integrazione minimo.

In tabella 4.1 vengono riassunti i risultati ottenuti con gli algoritmi presentati fino ad ora ed i risultati ottenuti con quest'ultima versione dell'algoritmo. Questo schema riassuntivo ci permette di confrontare direttamente le prestazioni degli algoritmi, in termini di affidabilità dei risultati e costo computazionale. Con **Sync** si intende l'algoritmo presentato nel lavoro di Greif [21] nel quale l'aggiornamento dell'abbondanza avviene solo ai punti di sincronizzazione delle particelle. Con **Allstep** si indica l'algoritmo presentato in Sez.4.2.4 nel quale l'abbondanza di ogni particella viene aggiornata ad ogni intervallo di integrazione. Invece con **Timestep-limit** si intende l'algoritmo presentato in Sez.4.2.5 nel quale l'intervallo di integrazione non può essere superiore a $\Delta t = 0.0005$. Con **Courant diff**

viene indicato l'algoritmo che fa uso di una condizione di Courant aggiuntiva per trattare la diffusione, come visto in Sez.4.2.6. $C_{Courant}^{diff}$ rappresenta il fattore moltiplicativo per limitare il timestep derivante dalla condizione di Courant sulla diffusione e Δt_{min}^{diff} il valore minimo che può assumere l'intervallo di integrazione. D_{fit}^* rappresenta il valore ottenuto dal fit lineare delle varianze dei profili radiali di abbondanza al variare del tempo, valore che è da confrontare con $D^* = 0.02$ che è il valore atteso. **Time** indica il tempo, in secondi, impiegato per far evolvere la simulazione e **Nsteps** il numero totale di intervalli di integrazione usati.

Analizzando la simulazione *I* notiamo che l'introduzione di una condizione di Courant migliora l'accuratezza della simulazione, ossia quanto bene essa riesce a riprodurre il valore aspettato del coefficiente di diffusione $D^* = 0.02$. L'incremento in accuratezza può essere stimato attorno al 17%. Tale miglioramento produce incremento di circa un fattore due nel costo computazionale, che passa da 846s, della versione standard, a 1641s. Mantenendo il $C_{Courant}^{diff}$ costante e diminuendo il valore del minimo intervallo di integrazione consentito, si ottiene un incremento in accuratezza di un altro 18% arrivando molto vicini al valore di D^* aspettato. Dal punto di vista del costo computazionale questo si traduce in un incremento di un fattore quattro rispetto alla simulazione *I*, e di un fattore otto rispetto all'algoritmo standard. Il costo computazionale e l'accuratezza delle simulazioni *II* e *III* sono confrontabili a quelli ottenuti usando un intervallo di integrazione fissato a $t = 0.0005$. Notiamo che il valore minimo Δt_{min}^{diff} è molto importante in termini di costo computazionale. Infatti confrontando le simulazioni *I*, *II* e *III*, che differiscono solo per tale fattore, si vede che il costo computazionale aumenta considerevolmente all'aumentare dell'intervallo minimo di integrazione. Nelle simulazioni *IV* e *V* si ottiene un incremento di accuratezza del 12%, rispetto alla simulazione *I*, a fronte di un aumento del tempo di calcolo di un fattore due.

Quindi i parametri usati per le simulazioni *I* e *IV* sono quelli che hanno un miglior rapporto costi benefici applicati al problema di diffusione preso in esame in questo capitolo.

Introducendo un criterio di Courant si ha la possibilità, tramite la scelta dei parametri $C_{Courant}^{diff}$ e Δt_{min}^{diff} , di ottenere l'accuratezza desiderata per la simulazione della diffusione nella scatola cubica. Allo stesso tempo questo criterio di scelta del timestep è adattivo spazialmente e temporalmente e quindi adatto per venire applicato a problemi astrofisici reali, nei quali non è pensabile imporre un intervallo di integrazione fissato per tutte le particelle.

In figura 4.6 vengono presentati, in scala logaritmica, i profili di abbondanza radiale medi a tre diversi tempi per cinque diverse versioni dell'algoritmo di diffusione. I profili di abbondanza sono normalizzati a uno ad ogni tempo, come anche la soluzione analitica. Per il grafico in alto il tempo rappresentato è $t = 0.1$, per il grafico al centro $t = 0.5$, per il grafico in basso il tempo è $t = 1$. Con **Sync** si intende l'algoritmo presentato nel lavoro di Greif [21] nel quale l'aggiornamento dell'abbondanza avviene solo ai punti di sincronizzazione delle particelle. Con **Allstep** si indica l'algoritmo presentato in Sez.4.2.4 nel quale l'abbondanza di ogni particella viene aggiornata ad ogni intervallo di integrazione. Invece con

Algoritmo	$C_{Courant}^{diff}$	Δt_{min}^{diff}	$D_{fit}^* (D_{fit}^*/D^*)$	Time [s]	Nsteps
Sync	idro	idro	0.0078 (0.39)	438	203
Allstep	idro	idro	0.0112 (0.56)	846	256
Timestep-limit	idro	max 0.0005	0.0183 (0.92)	6697	2048
Courant diff					
I	0.01	0.05	0.0146 (0.73)	1641	511
II	0.01	0.005	0.0182 (0.91)	6473	2196
III	0.01	0.001	0.0182 (0.91)	6694	2685
IV	0.005	0.025	0.0169 (0.85)	3240	1021
V	0.0025	0.02	0.0169 (0.85)	3277	1021

Tabella 4.1: Tabella riassuntiva delle simulazioni svolte con i relativi algoritmi usati. Con **Sync** si intende l'algoritmo presentato nel lavoro di Greif [21] nel quale l'aggiornamento dell'abbondanza avviene solo ai punti di sincronizzazione delle particelle. Con **Allstep** si indica l'algoritmo presentato in Sez.4.2.4 nel quale l'abbondanza di ogni particella viene aggiornata ad ogni intervallo di integrazione. Invece con **Timestep-limit** si intende l'algoritmo presentato in Sez.4.2.5 nel quale l'intervallo di integrazione non può essere superiore a $t = 0.0005$ in tempo del codice. Con **Courant diff** viene indicato l'algoritmo che fa uso di una condizione di Courant aggiuntiva per trattare la diffusione, come visto in Sez.4.2.6. $C_{Courant}^{diff}$ rappresenta il fattore moltiplicativo per limitare il timestep derivante dalla condizione di Courant sulla diffusione e Δt_{min}^{diff} il valore minimo che può assumere l'intervallo di integrazione. D_{fit}^* rappresenta il valore ottenuto dal fit lineare delle varianze dei profili radiali di abbondanza al variare del tempo, questo valore è da confrontare con $D^* = 0.02$ che è il valore atteso. In parentesi viene dato il rapporto fra il coefficiente di diffusione trovato e quello aspettato. **Time** indica il tempo, in secondi, impiegato per far evolvere la simulazione e **Nsteps** il numero totale di intervalli di integrazione usati.

Timestep-limit si intende l'algoritmo presentato in Sez.4.2.5 nel quale l'intervallo di integrazione non può essere superiore a $t = 0.0005$ in tempo del codice. Con **Courant condition I** viene indicato l'algoritmo che fa uso di una condizione di Courant aggiuntiva per trattare la diffusione, come visto in Sez.4.2.6, con parametri $C_{Courant}^{diff} = 0.01$ e $\Delta t_{min}^{diff} = 0.05$, mentre per **Courant condition IV** i parametri sono $C_{Courant}^{diff} = 0.005$ e $\Delta t_{min}^{diff} = 0.025$.

Si nota che le versioni dell'algoritmo *I* (in azzurro) e *IV* (in marrone), che usano una condizione di Courant, producono dei risultati in buon accordo con la soluzione analitica ad ogni tempo, soprattutto nella zona centrale. Questo risultato è significativo in quanto da un punto di vista astrofisico la zona di diffusione centrale è la più importante. La mancanza di diffusione chimica, infatti, si fa sentire maggiormente quando una particella di gas ricca di metalli si trova in una regione turbolenta che ne è priva. In questo caso ha un'importanza maggiore che la diffusione sia affidabile per le particelle vicine e in tempi relativamente brevi in quanto in tali regioni le condizioni idrodinamiche variano facilmente e le particelle sono soggette a molti spostamenti. Nel caso analizzato in questo capitolo, invece, si studia anche il rilassamento del sistema dopo un periodo lungo rispetto ai tempi scala delle turbolenze. Il risultato che si vuole ottenere quindi è una diffusione che sia il più possibile affidabile in regioni spaziali vicine alla particella e in tempi relativamente brevi.

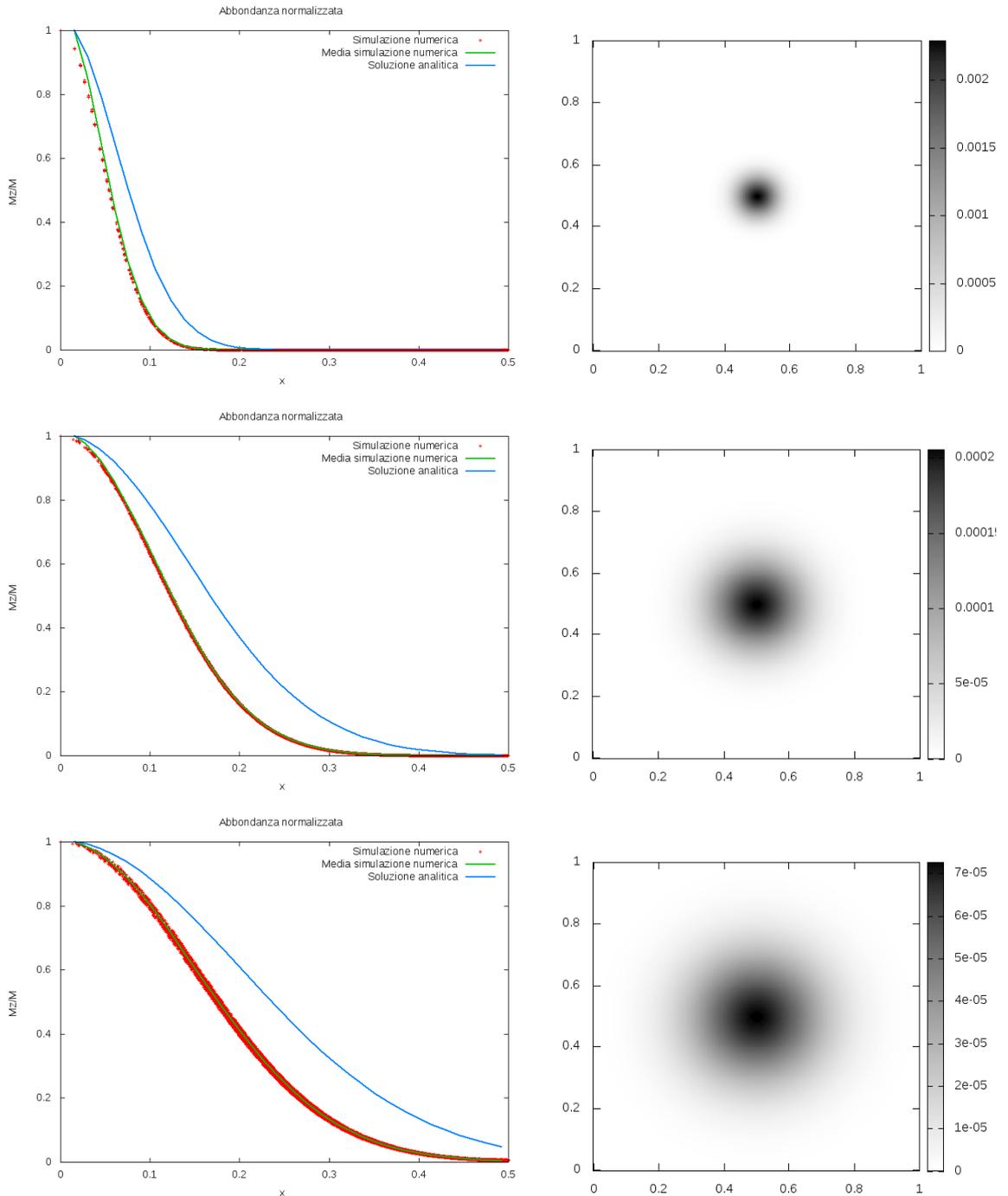


Figura 4.1: Profilo di abbondanza radiale normalizzato a uno a tre diversi tempi. I punti rossi rappresentano i valori di abbondanza di ogni particella rispetto alla distanza relativa dalla particella con abbondanza iniziale unitaria. La linea verde rappresenta la media dell'abbondanza in ogni guscio sferico dei 64 totali. La linea blu rappresenta la soluzione analitica per questo test, ossia l'andamento della funzione in Eq.(4.22), al variare della distanza dal centro e del tempo, con un coefficiente di diffusione fissato a $D^* = 0.02$. Per il grafico in alto il tempo rappresentato è $t = 0.1$, in unità di tempo della simulazione. Per il grafico al centro il tempo rappresentato è $t = 0.5$. Per il grafico in basso il tempo è $t = 1$. Sulla colonna di sinistra viene presentata la mappa di concentrazione ai diversi tempi.

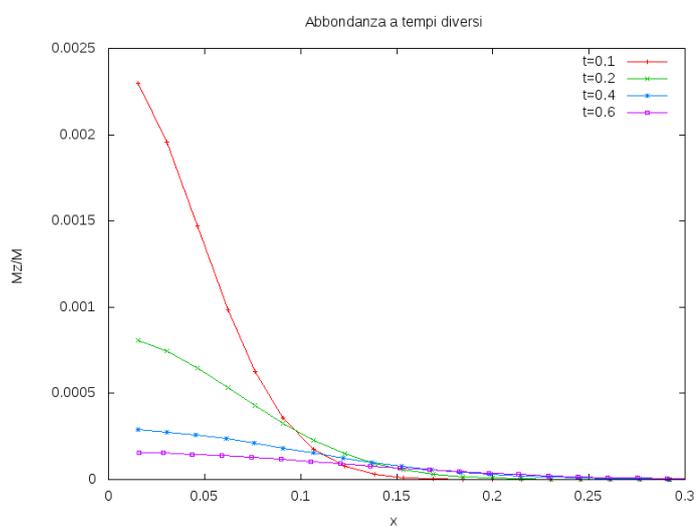


Figura 4.2: Profili di abbondanza radiale medi a quattro diversi tempi. In rosso a $t = 0.1$ in unità di tempo del codice. In verde a $t = 0.2$. In blu a $t = 0.4$ e in viola a $t = 0.6$.

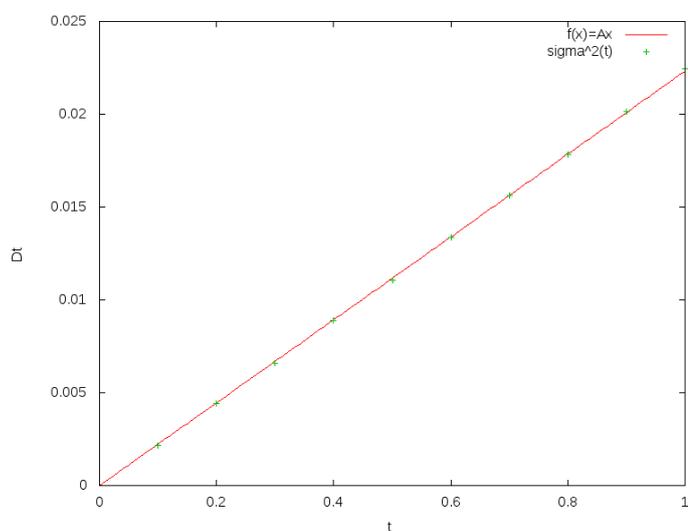


Figura 4.3: Fit lineare del parametro a che rappresenta la varianza della funzione di fit di Eq.(4.23), al variare del tempo. I punti rossi rappresentano il valore del parametro a rispetto al tempo a cui è stato ottenuto. La line verde rappresenta la funzione lineare di best fit, definita come $f(t) = 2D^* t$. Il valore del coefficiente numerico di diffusione così ottenuto è $D_{fit}^* = 0.011$ da confrontare con il coefficiente di diffusione aspettato di $D^* = 0.02$

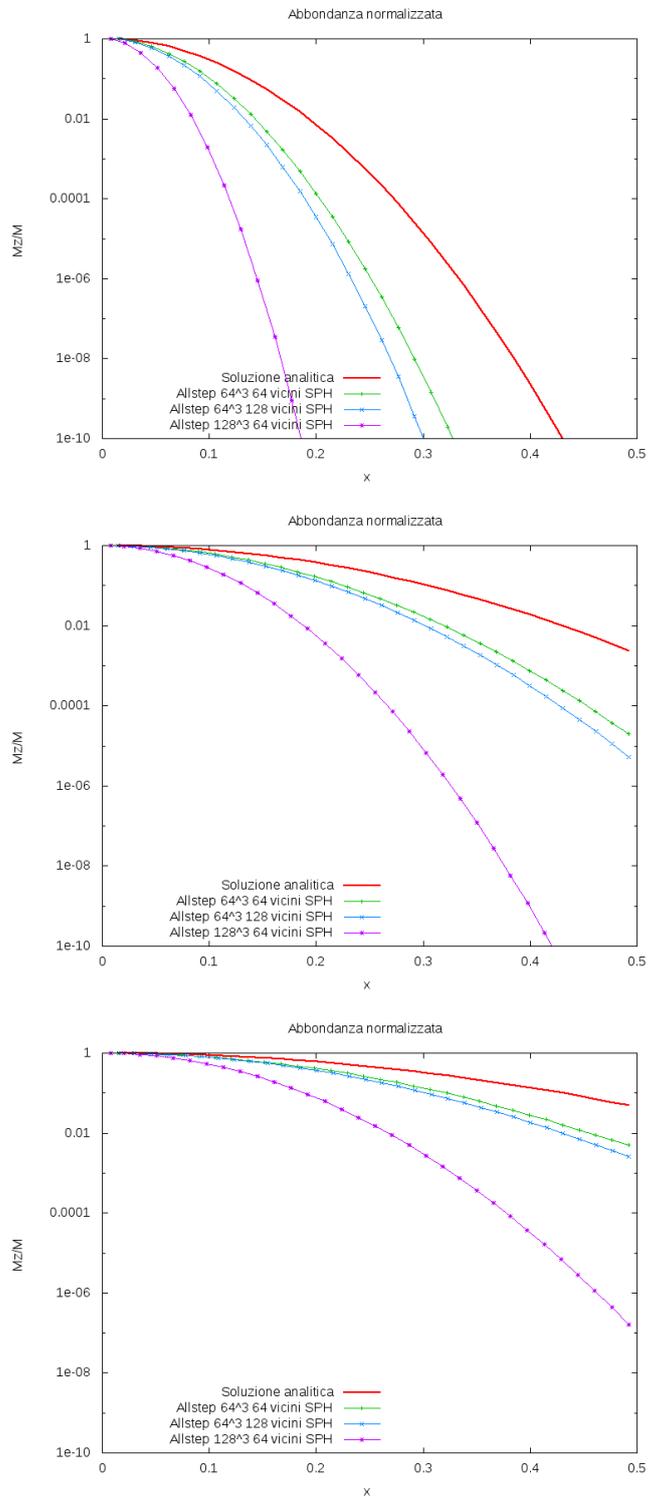


Figura 4.4: Profili di abbondanza radiale medi a tre diversi tempi per tre diverse versioni dell’algoritmo di diffusione. I profili di abbondanza sono normalizzati a uno ad ogni tempo, come anche la soluzione analitica. Per il grafico in alto il tempo rappresentato è $t = 0.1$, per il grafico al centro $t = 0.5$, per il grafico in basso il tempo è $t = 1$. Con **Allstep 64³ 64 vicini SPH** si intende l’algoritmo già presentato in questa sezione dove l’aggiornamento delle abbondanze avviene ad ogni timestep. Con **Allstep 64³ 128 vicini SPH** si intende la stessa versione dell’algoritmo precedente ma usando il doppio numero di vicini SPH. Con **Allstep 128³ 64 vicini SPH** si intende la stessa versione dell’algoritmo precedente ma usando una risoluzione in massa otto volte maggiore e tenendo fisso il numero di vicini SPH.

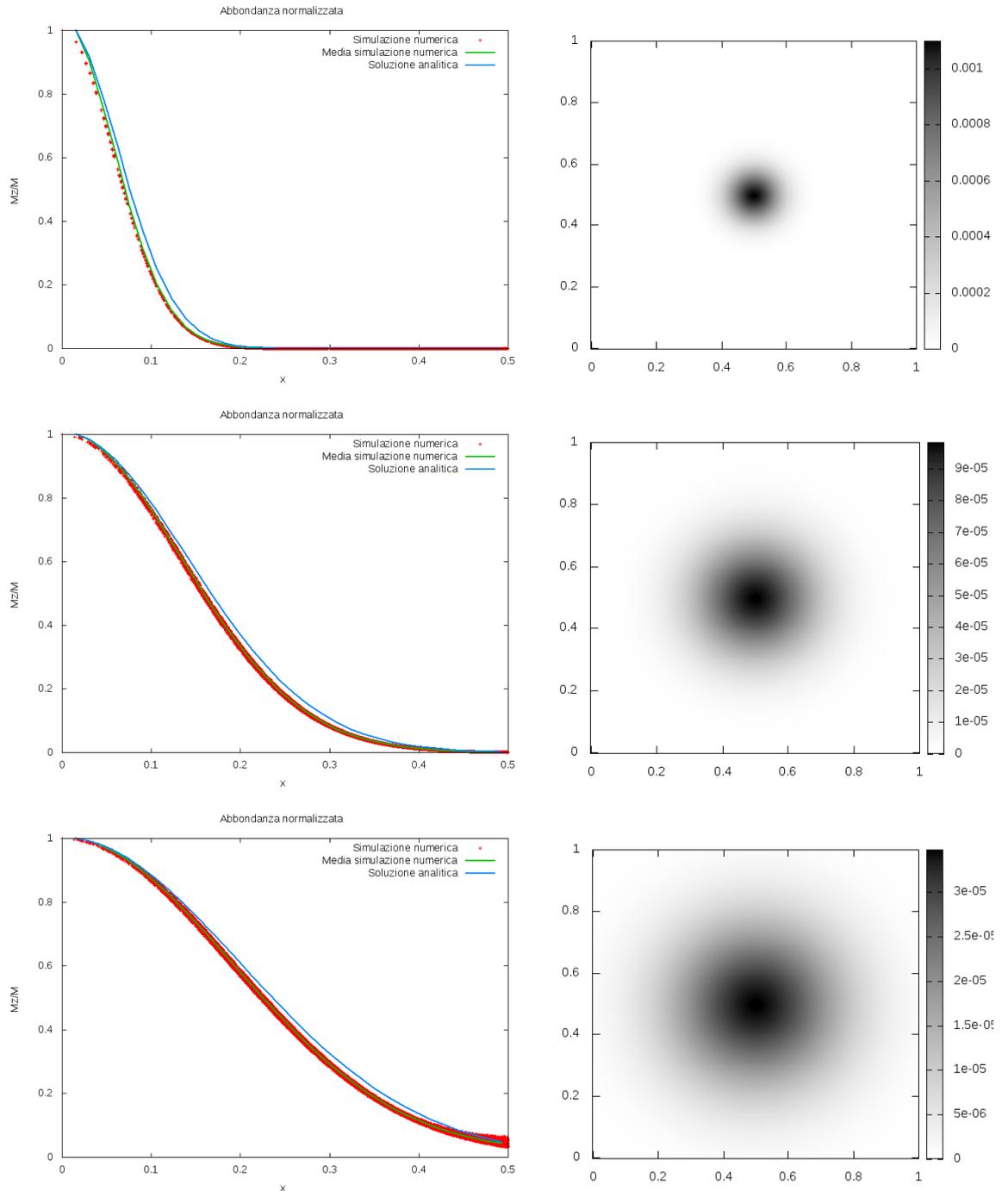


Figura 4.5: Profilo di abbondanza radiale normalizzato a uno a tre diversi tempi ottenuto imponendo un limite all'intervallo di integrazione. I punti rossi rappresentano i valori di abbondanza di ogni particella rispetto alla distanza relativa dalla particella con abbondanza iniziale unitaria. La linea verde rappresenta la media dell'abbondanza in ogni guscio sferico dei 64 totali. La line blu rappresenta la soluzione analitica per questo test, ossia l'andamento della funzione in Eq.(4.22), al variare della distanza dal centro e del tempo, con un coefficiente di diffusione fissato a $D^* = 0.02$. Per il grafico in alto il tempo rappresentato è $t = 0.1$, in unità di tempo della simulazione. Per il grafico al centro il tempo rappresentato è $t = 0.5$. Per il grafico in basso il tempo è $t = 1$. Sulla colonna di sinistra viene presentata la mappa di concentrazione ai diversi tempi.

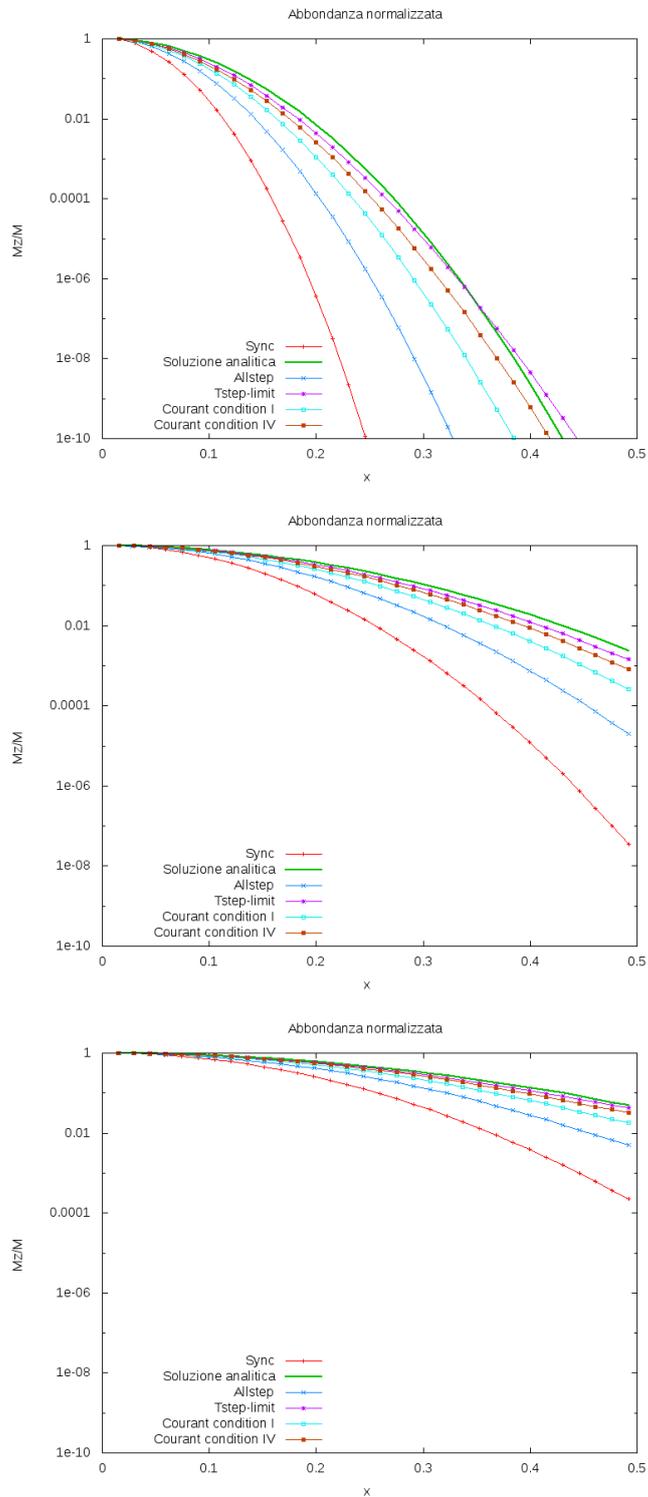


Figura 4.6: Profili di abbondanza radiale medi normalizzati, in scala logaritmica a tre diversi tempi per cinque diverse versioni dell’algoritmo di diffusione. Per il grafico in alto il tempo rappresentato è $t = 0.1$, in unità di tempo della simulazione. Per il grafico al centro il tempo rappresentato è $t = 0.5$. Per il grafico in basso il tempo è $t = 1$. Con **Sync** si intende l’algoritmo presentato nel lavoro di Greif [21]. Con **Allstep** si indica l’algoritmo presentato in Sez.4.2.4. Invece con **Timestep-limit** si intende l’algoritmo presentato in Sez.4.2.5. Con **Courant condition I** viene indicato l’algoritmo che fa uso di una condizione di Courant aggiuntiva per trattare la diffusione, come visto in Sez.4.2.6, con parametri $C_{Courant}^{diff} = 0.01$ e $\Delta t_{min}^{diff} = 0.05$, mentre per **Courant condition IV** i parametri sono $C_{Courant}^{diff} = 0.005$ e $\Delta t_{min}^{diff} = 0.025$.

4.3 Conclusioni

In questo capitolo abbiamo simulato un processo di diffusione di una sostanza chimica usando una soluzione approssimata dell'equazione della diffusione. Dopo aver analizzato le prestazioni di diverse versioni dell'algoritmo usato, si è giunti alla conclusione che per simulare consistentemente un processo di diffusione si necessita di un criterio di Courant diverso da quello idrodinamico. L'introduzione di un criterio di Courant permette di poter adattare l'intervallo di integrazione, per l'aggiornamento dell'abbondanza chimica, alle condizioni locali del fluido.

Usando la soluzione approssimata dell'equazione della diffusione e un criterio di Courant adattivo spazialmente e temporalmente, siamo in grado di simulare con accuratezza la diffusione chimica in regioni vicine alla particella che diffonde. Questo risultato è significativo in quanto da un punto di vista astrofisico la zona di diffusione centrale è la più importante. La mancanza di diffusione chimica, infatti, si fa sentire maggiormente quando una particella di gas ricca di metalli si trova in una regione turbolenta che ne è priva. In questo caso è importante che la diffusione sia affidabile per le particelle vicine, in quanto in tali regioni le condizioni idrodinamiche variano facilmente e le particelle sono soggette a molti spostamenti.

Naturalmente limitando l'intervallo di integrazione il costo computazionale aumenta. Bisogna ricordarsi, però, che nel test usato in questo capitolo, la diffusione in una scatola cubica, il fluido è in quiete. Quindi la condizione di Courant idrodinamica, che stabilisce l'intervallo di integrazione da usare, non è particolarmente stringente. In una simulazione astrofisica, invece, la diffusione chimica è particolarmente importante nelle zone di fluido turbolento. In tali zone la condizione di Courant idrodinamica impone intervalli di integrazione più piccoli. Quindi nelle simulazioni astrofisiche ci si aspetta che l'intervallo di integrazione idrodinamico sia minore e che quindi, l'eventuale diminuzione di tale intervallo a causa di una condizione di Courant aggiuntiva, sia più contenuta. Questo si traduce in un incremento computazionale minore, rispetto a quello presentato in questo capitolo, applicando l'algoritmo ad una simulazione cosmologica.

In conclusione rispondiamo alla domanda che ci si era posti all'inizio del capitolo sulla possibilità, implementando una soluzione approssimata, di ottenere una simulazione realistica della diffusione. È possibile, utilizzando una soluzione approssimata e una condizione di Courant aggiuntiva, simulare consistentemente la diffusione nelle regioni vicine alla particella che diffonde, a scapito di un aumento del tempo computazionale che può variare in base al problema preso in esame.

L'implementazione di un algoritmo di diffusione chimica, in GADGET-3, ha la sua chiara applicazione in un contesto cosmologico, nel quale la mancanza di una diffusione dei metalli prodotti dalle stelle, porta a una non corretta simulazione del raffreddamento radiativo del gas.

Quindi il prossimo passo è la verifica del funzionamento dell'algoritmo in uno scenario cosmologico in cui sia possibile anche quantificare il reale aumento in

costo computazionale introdotto dall'algoritmo di diffusione.

Conclusioni

Nel presente lavoro di Tesi ci si è prefissi l'obiettivo di implementare ed analizzare alcuni miglioramenti allo schema idrodinamico Lagrangiano SPH. Tali modifiche hanno lo scopo di alleviare alcune limitazioni di un approccio Lagrangiano all'idrodinamica.

Il primo problema che si è voluto affrontare è la difficoltà da parte dello schema Lagrangiano SPH nel trattare correttamente i gradienti attraverso le discontinuità fra diverse fasi del fluido. Questo comporta una non corretta trattazione dei fenomeni che si sviluppano nelle zone dove le quantità idrodinamiche del fluido sono discontinue. Un effetto diretto di tale limitazione è la formazione di un artefatto, nella regione ove è presente una discontinuità di contatto fra fluidi diversi che si traduce in una generazione spuria di una tensione superficiale, come si può vedere nel test di Sod in Sez. 3.3.1. Un'altra conseguenza è rappresentata dalla mancata formazione delle instabilità idrodinamiche, come per esempio le instabilità di Kelvin-Helmholtz e di Rayleigh-Taylor, nelle regioni ove vengono a contatto fluidi diversi. L'instabilità di Kelvin Helmholtz si crea quando una differenza di velocità tangenziale è presente all'interfaccia fra due fluidi. In questa configurazione qualsiasi perturbazione nel campo di velocità perpendicolare all'interfaccia genera un'instabilità idrodinamica che ha come effetto il mescolamento fra i fluidi. Il non instaurarsi dell'instabilità impedisce al fluido di mescolarsi correttamente e quindi di diffondere, come conseguenza, l'energia termica e il momento.

Nella prima parte di questo lavoro di Tesi siamo andati ad analizzare come alcune modifiche proposte allo schema Lagrangiano standard migliorino la descrizione delle instabilità idrodinamiche. Le modifiche analizzate ed implementate nel codice riguardano l'aggiunta di una diffusione termica dovuta all'instaurarsi delle instabilità idrodinamiche. Sono state implementate due differenti versioni proposte in letteratura per tale termine aggiuntivo, la prima proposta da Wadsley et al. [20] e la seconda proposta da Price [11].

In questi due lavori si propone di modificare solo le equazioni per l'evoluzione del momento Eq.(2.18) e dell'energia Eq.(2.19) aggiungendo a queste dei termini ulteriori che tengano conto degli effetti di dissipazione di energia termica a scale non risolte.

Si è quindi confrontato il comportamento di queste due versioni modificate dello schema SPH con la versione tradizionale. I tre diversi codici sono stati messi a confronto simulando tre test idrodinamici standard: il test di Sod, il test

multifase per l'instabilità di Kelvin-Helmholtz e il blob test. Si sono scelti questi test per via del loro ampio uso in letteratura per il confronto di codici diversi, o diverse implementazioni dello stesso codice

La domanda a cui si è voluto rispondere era se fosse possibile migliorare la descrizione delle instabilità idrodinamiche solamente aggiungendo piccole modifiche allo schema SPH. Da quanto emerso dall'analisi fatta nel terzo capitolo, la risposta è risultata affermativa. Infatti due sono le modifiche che, usate congiuntamente, ci permettono di migliorare la simulazione delle instabilità. La prima modifica è rappresentata dall'implementazione di una diffusione termica dovuta alla turbolenza, con la formulazione presentata da Price [11]. Tale modifica elimina l'artefatto in pressione presente nelle discontinuità di contatto favorendo un mescolamento migliore del fluido. Inoltre la diffusione termica così formulata riproduce la formazione e la crescita delle instabilità di Kelvin-Helmholtz. La seconda modifica è rappresentata dall'uso di una viscosità artificiale dipendente dal tempo, come presentata in Sez.2.1.7. Tale formulazione della viscosità è sufficiente per la cattura degli shock idrodinamici, ma al contempo non sopprime in modo spurio la crescita delle instabilità idrodinamiche. Questo perché l'azione della viscosità è spazialmente limitata alla zona di shock e temporalmente limitata al momento in cui avviene lo shock.

Il risultato a cui si è giunti in questa prima parte del lavoro di tesi è che per simulare più efficacemente la formazione delle instabilità idrodinamiche si ha bisogno sia di una diffusione termica, sia di una viscosità artificiale il più possibile limitata alla zona interessata dallo shock.

Nella seconda parte della tesi ci siamo occupati di un altro problema dei codici Lagrangiani: l'assenza di diffusione degli elementi chimici prodotti nei processi astrofisici. La composizione chimica della componente barionica, ossia quali e quanti elementi sono presenti nel gas, non rimane immutata nel tempo. La composizione primordiale del gas è determinata dalla nucleosintesi avvenuta durante il Big Bang, ma durante l'evoluzione dell'universo vari fenomeni astrofisici modificano la quantità e il tipo di elementi presenti nel gas. Le principali responsabili della produzione di elementi sono le stelle, che tramite processi di fusione creano nuovi elementi che poi vengono ridistribuiti nel mezzo interstellare tramite venti stellari, nebulose planetarie o con la morte esplosiva della stella, la supernova. Non solo la produzione di elementi è importante, ma anche la loro successiva diffusione del mezzo interstellare ed intergalattico. L'abbondanza di metalli, presente nel mezzo interstellare, determina la velocità con cui esso si raffredda. Infatti un gas più ricco di metalli tende a raffreddarsi prima, dato che gli elementi più pesanti dell'idrogeno possono perdere energia termica per emissione di radiazione elettromagnetica più facilmente, avendo più stati energetici accessibili. La temperatura del gas, a sua volta, è importante perché influenza la formazione stellare, in quanto le stelle si formano in presenza di gas freddo e denso.

Allo stato attuale la maggior parte dei codici cosmologici si occupano della formazione di metalli, ma non tutti ne seguono la diffusione. In particolare nei codici Lagrangiani SPH questi metalli vengono prodotti da una supernova e re-

distribuiti alle particelle all'interno del volume SPH che contiene la supernova. Dopo questa redistribuzione iniziale però i metalli presenti in una particella SPH di gas rimangono vincolati a tale particella senza mescolarsi o diffondersi nel mezzo interstellare o intergalattico. Quello che ci si aspetta è che i metalli siano diffusi a causa dei moti turbolenti presenti nel gas, ma che avvengono su scale spaziali non risolte dalla simulazione. Questi moti turbolenti sotto-risoluzione producono una diffusione dei metalli fino alle scale spaziali risolte dalla simulazione. Quindi è necessario un modello di diffusione chimica dalle scale non risolte a quelle risolte, per calcolare la corretta abbondanza dei metalli nella componente barionica diffusa.

Nella seconda parte della tesi si è implementato uno schema numerico per la diffusione dei metalli usando una soluzione approssimata dell'equazione della diffusione. Le diverse versioni dell'algoritmo usato sono state verificate usando un semplice test di diffusione in una scatola cubica di gas ideale in quiete. Il risultato numerico è stato poi confrontato con la soluzione analitica al fine di capire quale algoritmo porti ad una soluzione della diffusione più attinente alla soluzione attesa. Durante l'analisi dei risultati si è giunti a capire che l'accuratezza della soluzione numerica dipende in larga misura dall'intervallo di integrazione usato per integrare la soluzione dell'equazione della diffusione. Dopo aver analizzato le prestazioni di diverse versioni dell'algoritmo usato, si è giunti alla conclusione che per simulare consistentemente un processo di diffusione si necessita di un criterio di Courant diverso da quello idrodinamico. L'introduzione di un criterio di Courant permette di poter adattare l'intervallo temporale di integrazione, per l'aggiornamento dell'abbondanza chimica, alle condizioni locali del fluido. L'analisi accurata di come l'affidabilità dell'algoritmo di diffusione dipenda dall'intervallo di integrazione usato viene presentata in questa Tesi per la prima volta in letteratura.

Usando la soluzione approssimata dell'equazione della diffusione e un criterio di Courant adattivo spazialmente e temporalmente, siamo in grado di simulare con accuratezza la diffusione chimica in regioni vicine alla particella che diffonde. Questo risultato è significativo in quanto da un punto di vista astrofisico la zona di diffusione centrale è la più importante. La mancanza di diffusione chimica, infatti, si fa sentire maggiormente quando una particella di gas ricca di metalli si trova in una regione che ne è priva.

In conclusione è possibile ottenere una simulazione realistica della diffusione in regioni vicine alla particella che diffonde. Questo risultato viene raggiunto utilizzando una soluzione approssimata dell'equazione della diffusione e una condizione di Courant aggiuntiva. Per contro l'aumento del tempo di calcolo può variare in base al problema preso in esame.

Naturalmente questo lavoro di tesi ha la sua logica continuazione nell'applicazione delle modifiche implementate in uno scenario cosmologico. In questo lavoro abbiamo analizzato come le modifiche apportate al codice modificassero la simulazione di alcuni test per i quali la soluzione analitica esatta era conosciuta. Questo è il primo passo da compiere prima che una modifica sia applicata ad

un contesto cosmologico. In un contesto cosmologico i fenomeni che prendono parte alla formazione delle strutture astrofisiche sono molto complessi, dato che avvengono su tempi scala e scale caratteristiche molto diverse. In tale contesto è assai difficile isolare gli effetti che una singola modifica produce sullo scenario globale. Quindi lo scopo di questa tesi è stato di verificare che le modifiche producessero dei miglioramenti significativi e nella direzione richiesta in dei test facilmente controllabili, in modo da poterle applicare successivamente nel più complesso scenario della formazione di strutture cosmiche.

Più nel dettaglio per quanto riguarda la simulazione delle instabilità idrodinamiche il prossimo passo è una generalizzazione dell'implementazione di Price che possa essere usata anche nel caso in cui il codice idrodinamico sia accoppiato con un codice N-body per la descrizione della gravità. In tal modo si potrà stabilire come una corretta simulazione delle instabilità idrodinamiche modifica la simulazione di un evento cosmologico. L'implementazione di Price però non è immediatamente adattabile ad uno scenario cosmologico. Questo perché la formula per v_{sig}^u , in Eq. (3.17), dipende dalla differenza di pressione. Quando non è presente l'azione della gravità tale differenza in pressione dipende unicamente dallo stato termodinamico del gas e dalla presenza degli shock idrodinamici. In presenza di un gradiente del potenziale gravitazionale la differenza in pressione può instaurarsi per raggiungere la condizione di equilibrio idrostatico. Quindi per adattare questa formula al caso cosmologico bisogna trovare il modo di separare questi due effetti, la differenza in pressione da shock idrodinamici e la differenza di pressione dovuta al campo gravitazionale. Inoltre l'applicazione di queste modifiche in uno scenario astrofisico ci permette anche di capire il reale incremento computazionale richiesto per ottenere una simulazione più accurata della formazione delle instabilità idrodinamiche.

Successivamente si confronteranno i risultati ottenuti con i codici Euleriani, che per quanto riguarda la simulazione delle instabilità presentano meno problemi, in modo da stabilire se la diffusione termica dovuta alla turbolenza permette ai risultati ottenuti con codici diversi di convergere maggiormente. Infatti, come discusso in Sez. 2.3.2, vi sono delle differenze significative nella simulazione della formazione di un ammasso di galassie fra codici Euleriani e codici Lagrangiani. Queste differenze si pensa siano anche dovute ad una non corretta trattazione delle instabilità idrodinamiche negli schemi SPH. Utilizzando la correzione presentata in questa tesi, basata sulla diffusione termica dovuta alla turbolenza, saremo in grado di stabilire quanto e se il mancato sviluppo delle instabilità sia la causa di questa differenza nei risultati fra codici Euleriani e Lagrangiani.

Per quanto riguarda la seconda parte della tesi, l'implementazione di un algoritmo di diffusione chimica in GADGET-3 ha la sua chiara applicazione in un contesto cosmologico, nel quale la mancanza di una diffusione dei metalli prodotti dalle stelle implica una non corretta simulazione del raffreddamento radiativo del gas. Quindi il prossimo passo è la verifica del funzionamento dell'algoritmo in uno scenario cosmologico in cui sia possibile anche quantificare il reale aumento in costo computazionale introdotto dall'algoritmo di diffusione.

Notiamo, infine, come i modelli di diffusione chimica e diffusione termica dovuta alla turbolenza, implementati in questo lavoro di tesi, siano tra di loro complementari. Infatti il modello di diffusione chimica permette alla diffusione dovuta alla turbolenza su piccole scale di influenzare la concentrazione sulle scale risolte dalla simulazione, mentre, sulle scale risolte, la formazione delle instabilità idrodinamiche ottenuta implementando un modello di diffusione termica, ha come effetto un mescolamento che favorisce ulteriormente la diffusione.

Per concludere, l'introduzione della diffusione chimica in una simulazione cosmologica ci permetterà di capire quanto questo fenomeno fisico, per ora non incluso nei codici Lagrangiani, influisca sulla descrizione numerica delle proprietà osservative delle strutture cosmiche. Inoltre fornirà una soluzione all'equazione della diffusione che non è influenzata dalla diffusione numerica, come accade nei codici Euleriani, e che possa essere usata in simulazioni basate su codici intrinsecamente adattivi quali sono quelli Lagrangiani.

Bibliografia

- [1] V. Springel, The largest N-body simulation of the universe, 2004
- [2] K. Dolag, Splotch: visualizing cosmological simulation, *New Journal of Physics*, Volume 10, Issue 12, pp. 125006 (2008)
- [3] G. Murante, P. Monaco, M. Giovalli, S. Borgani, A. Diaferio, A sub-resolution multiphase interstellar medium model of star formation and SNe energy feedback, 2010, *MNRAS*.
- [4] K. Huang, *Meccanica Statistica*, Zanichelli, Bologna 1997
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics, Course of theoretical physics*, Oxford: Pergamon Press, 1959, 1959.
- [6] O. Agertz, B. Moore, J. Stadel, D. Potter, F. Miniati, J. Read, L. Mayer, A. Gawryszczak, A. Kravtsov, Å. Nordlund, F. Pearce, V. Quilis, D. Rudd, V. Springel, J. Stone, E. Tasker, R. Teyssier, J. Wadsley, R. Walder, Fundamental differences between SPH and grid methods, *MNRAS* 380 (2007) 963–978.
- [7] J. J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 30 (1992) 543.
- [8] J. I. Read, T. Hayfield, O. Agertz, Resolving mixing in Smoothed Particle Hydrodynamics, *ArXiv e-prints*.
- [9] L. Hernquist, N. Katz, Treesph - a unification of sph with the hierarchical tree method, *ApJS* 70 (1989) 419.
- [10] W. Benz, Smooth particle hydrodynamics: A review, in: J. Buchler (Ed.), *Numerical Modeling of Stellar Pulsations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990, p. 269.
- [11] D. J. Price, Modelling discontinuities and Kelvin-Helmholtz instabilities in SPH, *Journal of Computational Physics* 227 (2008) 10040–10057.
- [12] K. Dolag, F. Vazza, G. Brunetti, G. Tormen, Turbulent gas motions in galaxy cluster simulations: the role of smoothed particle hydrodynamics viscosity, *MNRAS* 364 (2005) 753–772.

- [13] Choudhuri, A. R., Dec. 1998. The physics of fluids and plasmas : an introduction for astrophysicists /. New York : Cambridge University Press. QB466.F58 C46 1998.
- [14] L. Brookshaw, A method of calculating radiative heat diffusion in particle simulations, Proceedings of the Astronomical Society of Australia 6 (1985) 207–210.
- [15] M. S. Fulbright, W. Benz, M. B. Davies, A method of smoothed particle hydrodynamics using spheroidal kernels, ApJ 440 (1995) 254–262.
- [16] P. R. Shapiro, H. Martel, J. V. Villumsen, J. M. Owen, Adaptive Smoothed Particle Hydrodynamics, with Application to Cosmology: Methodology, ApJS 103 (1996) 269.
- [17] J. M. Owen, J. V. Villumsen, P. R. Shapiro, H. Martel, Adaptive Smoothed Particle Hydrodynamics: Methodology. II., ApJS 116 (1998) 155.
- [18] S. Rosswog, Astrophysical smooth particle hydrodynamics (2009), astro-ph/0903.5075v1
- [19] Price D. J., 2008, Journal of Computational Physics, 227, 10040
- [20] J. W. Wadsley, G. Veeravalli and H. M. P. Couchman On the treatment of entropy mixing in numerical cosmology Mon. Not. R. Astron. Soc. 387, 427–438 (2008)
- [21] T. H. Greif, S. C. O. Glover, V. Bromm, R. S. Klessen, Chemical mixing in smoothed particle hydrodynamics simulations, MNRAS 392 (2009) 1381–1387.
- [22] R. S. Klessen , D. N. Lin, 2003, E, 67, 046311
- [23] Wise J. H., Abel T., 2008, ApJ, 685, 40
- [24] M. Jubelgas , V. Springel ,K. Dolag , 2004, Mon. Not. R. Astron. Soc., 351, 423
- [25] G. Sod, A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys. 43 (1978) 1–31.
- [26] Monaghan J. J., Huppert H. E., Worster M. G., 2005, J. Comp. Phys., 206, 684
- [27] R. A. Gingold, J. J. Monaghan, Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics, Journal of Computational Physics 46 (1982) 429–453.
- [28] D. Price, Magnetic fields in astrophysics, Ph.D. thesis, University of Cambridge, arXiv:astro-ph/0507472 (2004).

- [29] J. J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics, *Reports on Progress in Physics* 68 (2005) 1703–1759.
- [30] V. Springel, The cosmological simulation code GADGET-2, *MNRAS* 364 (2005) 1105–1134.
- [31] R. Landshoff, A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks, Los Alamos National Laboratory Report, LA-1930.
- [32] J. Morris, J. Monaghan, A switch to reduce sph viscosity, *J. Comp. Phys.* 136 (1997) 41.
- [33] S. Rosswog, M. B. Davies, F.-K. Thielemann, T. Piran, Merging neutron stars: asymmetric systems, *A&A* 360 (2000) 171–184.
- [34] K. Dolag, F. Vazza, G. Brunetti, G. Tormen, Turbulent gas motions in galaxy cluster simulations: the role of smoothed particle hydrodynamics viscosity, *MNRAS* 364 (2005) 753–772.
- [35] V. Springel, L. Hernquist, Cosmological smoothed particle hydrodynamics simulations: the entropy equation, *MNRAS* 333 (2002) 649–664.
- [36] Monaghan J. J., 1997, *J. Comp. Phys.*, 136, 298
- [37] Frenk C. S., White S. D. M., Bode P., et al., The Santa Barbara Cluster Comparison Project: A Comparison of Cosmological Hydrodynamics Solutions, 1999, *ApJ*, 525, 554
- [38] N. L. Mitchell , I. G. McCarthy , R. G. Bower , T. Theuns , R. A. Crain, On the Origin of Cores in Simulated Galaxy Clusters, *MNRAS* , Volume 395, Issue 1, pp. 180-196.
- [39] <http://www.mpa-garching.mpg.de/gadget/>
- [40] Chandrasekhar S., 1961, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*
- [41] D. S. Balsara, Asymmetries in extragalactic radio sources, Ph.D. thesis, AA(Illinois Univ., Urbana-Champaign.) (1991).
- [42] Daniel J. Price, SPLASH: An interactive visualisation tool for Smoothed Particle Hydrodynamics simulations, *Publications of the Astronomical Society of Australia*, Volume 24, Issue 3, pp. 159-173.

Ringraziamenti

Un grazie a Stefano che ha sempre trovato tempo per me, anche per correggere i miei errori di scrittura (nessuno mi sgridava più così dalle elementari), a Luca che mi ha seguito nonostante la contingente situazione socio-politico-economica, a Giuseppe che mi ha iniziato a GADGET in una splendida Torino estiva.

Un grazie speciale ad Agnese (nostro Capitano, punta di diamante del corso di Astrofisica) che mi ha insegnato che lo zio non ha doppie, che la p è ciccietta e ci vuole una m per reggerla, che inoltre vuole due virgole, che ha letto e corretto bozze e allineato scritte nelle slides e a dirla tutta non ha guadagnato molto dallo stare in ufficio con me! E un grazie per essermi stata vicino in momenti peggiori di una tesi specialistica.

Un grazie a Emi “compagno di classe“ con cui cantare durante le fasi intense di studio, *Almeno tu nell’universo* (amore platonico comunque per chi se lo chiedesse) a cui prendere in prestito *Friends* a tempo indeterminato, che ha cucinato per me mille volte.

Un grazie a Silvia che se anche non ha corretto bozze o cantato con me (ancora) per il solo fatto di esserci mi ha reso le cose enormemente più facili.

Un grazie a Giulio che se anche adesso è in un continente diverso, overseas, mi è stato vicino a modo suo in momenti difficili.

Un grazie enorme, come i danni al mio fegato, a Michelino che mi ha, non certo contro voglia, accompagnato in delle sbronze colossali (ovviamente esagero Mamma) a base di quel nettare degli dei chiamato Long Island. Sono state tanto utili quanto deleterie ma a volte ci vuole e se hai un grande amico e una grande persona a fianco, non letteralmente è chiaro, addirittura puoi sentirne la mancanza.

Un grazie a Davide senza il quale di sicuro non sarei arrivato nemmeno alla triennale. Compagno di sventure di un periodo che, come studio, non era proprio roseo.

Un grazie a Florian che, quando c’era in appartamento, mi permetteva di discutere di cose interessanti anche nel contesto domestico.

Un grazie alla Pina anche se ogni volta che mi vede poi va a finire che mi insulta.

Un grazie a Fabri che mi prestava la sua pistola laser nei week-end di studio in appartamento.

Un grazie a Giulio Dodo che mi ha fatto capire cosa vuol dire passare al lato oscuro!

Un grazie ai miei vecchi compagni di classe, Esteban, Bivis, Gobbo, Efrem, Fil, Velesh Velisg Pik, Orli e gli altri con cui sono rimasto in contatto e che una, o due se va proprio bene, volte l'anno mi regalano delle cene ricche di ricordi, ormai solo felici, delle superiori.

Sono stati due anni (si ti piacerebbe solo due..) duri, se con molte persone non sono stato più in contatto non è per mancanza di voglia ma di energia. Questo corso di studi ha richiesto molta energia mentale e fisica e dato che non volevo che finisse come la triennale ci ho dato dentro. Forse ho lasciato qualcosa indietro ma ormai non è più possibile recuperare quello che è stato e bisogna pensare a quello che sarà. Perché il vento soffia sempre verso il futuro!!

Un grazie indescrivibile alla mia Famiglia che mi ha sostenuto costantemente in questi anni di alta formazione e a cui dedico questo lavoro di Tesi. Un grazie allo Zio Massimo, che dato che se lo sta chiedendo viene incluso volente o nolente nella Famiglia, perchè quando si discuteva di Università mi ha sostenuto con un entusiasmo e con una fiducia nelle mie capacità che nemmeno io lontanamente possedevo.

In questi anni mi è stato utile ricordare:

- Attento agli Inglesi
- Stupido è chi lo stupido fa'
- Quando quattrocento anni avrai certo bello non sarai
- No! Provare no. Fare! O non fare. Non c'è provare!
- Il vento soffia verso il futuro!
- Fare mattoni ogni giorno
- Provalo!
- L'esperienza non è ciò che accade ad un uomo ma cosa ne fa di ciò che gli accade.

Conosco la metà di voi soltanto a metà; e nutro, per meno della metà di voi, metà dell'affetto che meritate.

Sezione non riveduta e non corretta quindi così com'è nella mia testolina..