

Corso di Introduzione all'Astrofisica
P. Monaco, AA 2015/2016

Soluzione degli esercizi
Parte 1, Misure astronomiche

(1) Partendo da

$$M = m - 5 \log d + 5$$

dove d è in pc, usiamo la relazione tra AU e pc per trovare:

$$B = M_{B,\odot} + 5 \log(1 \text{ AU}/1 \text{ pc}) - 5 = -\mathbf{26.09}$$

Il rapporto tra le luminosità apparenti, considerando $B = 0$ per Vega, è:

$$10^{-0.4 \times (-26.09)} = \mathbf{2.73 \times 10^{10}}$$

Se il Sole fosse a 300 pc di distanza, si avrebbe:

$$B = M_{B,\odot} + 5 \log 300 - 5 = \mathbf{12.87}$$

facilmente visibile con un telescopio amatoriale. A 10 kpc:

$$B = M_{B,\odot} + 5 \log 10000 - 5 = \mathbf{20.48}$$

visibile con un buon telescopio da astrofili.

(2) Una velocità $v = 1 \text{ km/s}$ provoca uno spostamento Doppler di:

$$\frac{v}{c} = 3.33 \times 10^6.$$

A 4400 \AA questo si traduce in uno spostamento di:

$$\delta\lambda = \mathbf{0.015 \text{ \AA}}.$$

Possiamo prendere questa come risoluzione minima necessaria a misurare la velocità. Consideriamo adesso una riga dell'idrogeno a $T = 5800 \text{ K}$, allargata termicamente; la velocità termica è:

$$v = \sqrt{\frac{kT}{m_p}} = 6.94 \text{ km/s}.$$

A questa velocità corrisponde un allargamento di 0.10 \AA . Per descrivere adeguatamente un profilo del genere dobbiamo avere una risoluzione molto migliore di questo intervallo. Per esempio:

$$\delta\lambda = \mathbf{0.01 \text{ \AA}}.$$

(3) Per l'effetto Doppler, la velocità corrispondente a questo allargamento è:

$$v = c \frac{0.01 \text{ \AA}}{1216 \text{ \AA}} = \mathbf{12300 \text{ km s}^{-1}}.$$

La temperatura corrispondente è:

$$T = \frac{m_p v^2}{k} = \mathbf{1.82 \times 10^{10} \text{ K.}}$$

Siccome l'idrogeno è completamente ionizzato a $T > 10^4 - 10^5 \text{ K}$, e siccome la Lyman α richiede la presenza di idrogeno neutro, questa riga non può essere allargata termicamente, è più plausibile pensare al **moto macrosopico** di nubi.

(4) Supponiamo che il filtro V sia largo $\Delta\lambda = 1000 \text{ \AA}$. Se in un intervallo $\delta\lambda = 0.01 \text{ \AA}$ rivelò $n = 1000$ fotoni, e se suppongo per semplicità che il numero di fotoni per bin di λ sia costante nel filtro, ottengo che il numero di fotoni che raccoglierei se avessi efficienza 1 è

$$N = n \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} \frac{1}{\epsilon}$$

dove $\epsilon = 0.2$ è l'efficienza del rivelatore. L'energia dei fotoni raccolti dal telescopio è $E = Nh\nu = Nhc/\lambda$ dove per semplicità usiamo $\lambda_0 = 5400 \text{ \AA}$ per tutti i fotoni. Il flusso della stella misurato con un'esposizione di $t = 30 \text{ m} = 1800 \text{ s}$ è quindi:

$$f_V = \frac{E}{St} = \frac{nhc}{\pi R^2 t \lambda_0 \epsilon} \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda}.$$

Sostituendo i valori dati otteniamo:

$$f_V = 1.06 \times 10^{-11} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} = 1.06 \times 10^{-14} \text{ W m}^{-2}.$$

La magnitudine corrispondente, calibrata su Vega, utilizzando il valore di f_0 dato nelle dispense ($f_0 = 3.03 \times 10^{-6} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} = 3.03 \times 10^{-9} \text{ W m}^{-2}$), è:

$$V = 2.5 \log \frac{f_0}{f_V} = \mathbf{13.73}.$$

(5) Utilizzando le equazioni per i sistemi stellari binari, otteniamo dalle equazioni (1.11)-(1.13):

$$m_1 = \frac{\Omega^2 r^3}{G} \frac{v_2}{v_1 + v_2}$$

e dall'equazione (1.12)+(1.13):

$$\Omega r = v_1 + v_2$$

La seconda si risolve immediatamente:

$$r = 2.65 \times 10^{10} \text{ m} = \mathbf{0.176 \text{ AU}}$$

Inserendo questo valore di r nella prima equazione troviamo:

$$m_1 = 6.97 \times 10^{30} \text{ kg} = \mathbf{3.5 \text{ M}_\odot}$$

$$m_2 = 5.18 \times 10^{30} \text{ kg} = \mathbf{2.6 \text{ M}_\odot}$$

Per calcolare i raggi, basta calcolare che, rispetto alla stella 1, la stella 2 percorre un arco pari alla somma dei due diametri in un tempo $T = 8h 45m$ (pari alla durata totale dell'eclissi), e una distanza $2\pi r$ in un tempo $P = 2\pi/\Omega$. Quindi:

$$2R_1 + 2R_2 = T\Omega r = T(v_1 + v_2)$$

La seconda eguaglianza, che viene dalle equazioni riportate sopra, ci dice che il passaggio della stella 2 di fronte alla stella 1 avviene a velocità uguale a $(v_1 + v_2)$. La durata $t = 45$ m dell'eclissi totale corrisponde al percorrimento di una distanza pari alla differenza dei due diametri:

$$2R_1 - 2R_2 = t\Omega r = t(v_1 + v_2)$$

Risolvendo i due sistemi otteniamo, in raggi solari:

$$R_1 = \frac{1}{4}(T + t)(v_1 + v_2) = \mathbf{2.15 R_\odot}$$

$$R_2 = \frac{1}{4}(T - t)(v_1 + v_2) = \mathbf{1.81 R_\odot}$$

(6) Chiamando M la massa di una delle due stelle, dall'equazione (1.11) otteniamo:

$$\Omega = \sqrt{\frac{2GM}{r^3}}$$

e dall'equazione (1.12):

$$v = \frac{\Omega r}{2} = \sqrt{\frac{GM}{2r}}.$$

Possiamo risolvere le due equazioni assumendo $r = 1$ AU, e lasciando esplicita la dipendenza da r :

$$\Omega = 2.83 \times 10^{-7} \left(\frac{r}{1 \text{ AU}}\right)^{-3/2} \text{ s}^{-1}$$

$$v = 21.0 \left(\frac{r}{1 \text{ AU}}\right)^{-1/2} \text{ km s}^{-1}$$

Per il metodo spettroscopico, l'osservabile è

$$v \sin i = 14.8 \left(\frac{r}{1 \text{ AU}}\right)^{-1/2} \text{ km s}^{-1}$$

La minima velocità osservabile è $v_{\min} = c\delta\lambda/\lambda = 6.8$ km/s. Questa si ottiene per una distanza massima tra le stelle:

$$\mathbf{r_{\max} < 4.8 \text{ AU.}}$$

L'angolo sotteso dal sistema è $\theta = r/d$. Supponendo che $r = r_{\max}$ e ponendo l'angolo a $0.5''$ si ottiene che per essere visibile come tecnica sia visuale che spettroscopica la binaria deve essere più vicina di:

$$\mathbf{d < 9.6 \text{ pc.}}$$

(7) Utilizzando l'equazione che lega l'angolo sotteso $\theta = R/d$ con raggio R e distanza d della stella, si ottiene

$$\mathbf{d = 464 \text{ pc}}$$

.

(8) La minima velocità ricavabile dal moto proprio la calcoliamo come:

$$v_1 = \frac{d\delta\theta}{\Delta t} = \mathbf{7.10 \text{ km s}^{-1}}.$$

La minima velocità lungo la linea di vista risulta:

$$v_2 = c \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \mathbf{3.75 \text{ km s}^{-1}}.$$

A $d = 10 \text{ kpc}$ v_2 naturalmente non cambia, mentre:

$$v_1 = \mathbf{236 \text{ km s}^{-1}}.$$

(9) Una moneta di 1 euro sottende $1''$ a

$$\mathbf{d = 5.2 \text{ km}}$$

(10)

$$1 \text{ pc} = \mathbf{3.09 \times 10^{18} \text{ cm}} = \mathbf{3.09 \times 10^{16} \text{ m}}$$

(11)

$$\mathbf{2.5 \times 10^{-5}'' \left(\frac{\lambda}{D} \right)}$$

Per un antenna radio di 20 m che osserva a 21 cm, il limite di diffrazione è $\mathbf{2625''} = 44'$. Per uno specchio di 1 m a 6000 \AA il limite di diffrazione è di $\mathbf{0.15''}$.

(12) Le risposte sono le seguenti:

- a) $\mathbf{25''}$,
- b) $\mathbf{0.052''}$,
- c) $\mathbf{0.020''}$,
- d) rispettivamente $\mathbf{32'}$, $\mathbf{39''}$, $\mathbf{3 \times 10^{-3}''}$.

Parte 2, Le stelle

- (1) Per tracciare il grafico è sufficiente seguire le istruzioni.
- (2) Tutti i procedimenti e i valori delle quantità richieste si trovano nelle dispense.
- (3) La velocità tipica di un protone a temperatura $T = 1.5 \times 10^7$ K è:

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m_p}} = 611 \text{ km s}^{-1}$$

Dalla equazione (2.31), espressa nel sistema cgs, abbiamo che:

$$r = \frac{4e^2}{m_p v^2} = 1.48 \times 10^{-10} \text{ cm} = 1.48 \times 10^{-12} \text{ m}$$

Questo è un fattore **1060** volte il raggio del nucleo.

- (4) La temperatura T_0 di bruciamento dell'idrogeno è calcolata nelle dispense. Possiamo esprimere l'efficienza di generazione dell'energia come:

$$\epsilon = \epsilon_0 \exp \left[- \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-1/3} \right]$$

Quello che vogliamo è la pendenza della curva $\log \epsilon (\log T)$ a $T = 1.5 \times 10^7$ K. Questo si può ottenere tramite una espansione in serie di Fourier. La pendenza è identica se utilizziamo il logaritmo naturale. Con un minimo di algebra risulta che:

$$\ln \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = - \exp \left(- \frac{1}{3} \ln \frac{T}{T_0} \right)$$

Chiamiamo $x = \ln(T/T_0)$, $f(x) = \ln(\epsilon/\epsilon_0)$:

$$f(x) = - \exp \left(- \frac{x}{3} \right)$$

La pendenza andrà valutata al valore $x_1 = \ln(1.5 \times 10^7 \text{ K}/T_0) = -7.84$. Risulta:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_1} = \frac{1}{3} \exp \left(- \frac{x_1}{3} \right) = \mathbf{4.55}$$

- (5) Dalla figura 2.25 si ricava che il Main Sequence TurnOff (MSTO) per un ammasso di 7×10^9 yr avviene a $M_V \sim 4$, $B - V \sim 0.5$. Per vedere bene la Main Sequence richiediamo di risolvere le stelle fino a 2 mag più deboli del MSTO. Il modulo di distanza a $d = 20$ kpc è:

$$\mu = 5 \log d - 5 = 16.5$$

per cui le magnitudini a cui dobbiamo arrivare nelle bande B e V sono:

$$\mathbf{m_B \sim 23.0, m_V \sim 22.5}$$

(6) Utilizzando l'equazione (2.52), per $M = 0.6 M_\odot$ otteniamo:

$$R = 1.06 \times 10^9 \text{ cm}$$

La luminosità risulta:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 = \mathbf{1.28 \times 10^{-4} L_\odot}$$

Utilizzando $\mu = 2$, il tempo di raffreddamento risulta:

$$t_{\text{WD}} = \frac{3MkT}{2\mu m_p L} = \mathbf{2.36 \times 10^7 \text{ yr}}$$

(7) Risulta utile calcolare il raggio di Schwarzschild e la corrispondente densità scalandole ad una M_\odot :

$$R_{\text{sch}} = \frac{2GM}{c^2} = 2.95 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ km}$$

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R_{\text{sch}}^3} = 1.85 \times 10^{16} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-2} \text{ g cm}^{-3}$$

Per $M = 5 M_\odot$ si ha: $R_{\text{sch}} = \mathbf{14.8 \text{ km}}$, $\bar{\rho} = \mathbf{7.4 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}}$. Per $M = 10^8 M_\odot$ si ha: $R_{\text{sch}} = \mathbf{1.97 \text{ AU}}$, $\bar{\rho} = \mathbf{1.85 \text{ cm}^{-3}}$. La densità del nucleo, ottenuta dividendo la massa del protone per $4\pi r_{\text{nuc}}^3/3$, dove il raggio del nucleo è dato nel testo dell'esercizio (3), è di $1.44 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$.

(8) Seguendo la dimostrazione data dalle equazioni (2.17)-(2.21), la pressione di radiazione è $1/3$ della densità di energia e ,

$$\int_c^s 4\pi r^3 dP = 3 \int_c^s V dP = -3 \int_c^s P dV = -3 \int_c^s \frac{1}{3} e dV = -K$$

Questo implica che il teorema del viriale assume la forma:

$$\mathbf{K + \Omega = E = 0}$$

per cui la stella è sempre marginalmente legata.

(9) Seguendo il procedimento delineato nel Maoz, bisogna prima calcolare la “richiesta” di pressione, ottenendo la nota dipendenza $P \propto GM^{2/3} \rho^{4/3}$ (con un certo coefficiente); successivamente si usa la condizione per cui la pressione di radiazione è uguale a quella termica, per ottenere una relazione tra T e ρ ($T \propto \rho^{1/3}$); infine ci si calcola la “disponibilità” di pressione (in questo caso il doppio di una delle due pressioni in gioco), sostituendo alla temperatura la soluzione della relazione di cui sopra. Uguagliano la “richiesta” e la “disponibilità” di pressione, si ottiene una relazione che ci permette di calcolare una massa:

$$M = 2^{3/2} \left(\frac{3^5}{4\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{a^{1/2} G^{3/2}} \left(\frac{k}{\mu m_p} \right)^2 = \mathbf{115 M_\odot}$$

(10) Partendo dai dati dell'esercizio, e assumendo $\mu = 1$ per i neutroni per calcolare la loro densità numerica n ,

$$l = \frac{1}{n\sigma} = \mathbf{25 \text{ m}}$$

Per emergere al di fuori della stella di neutroni il neutrino ci mette un tempo:

$$t = \frac{3R^2}{lc} = \mathbf{0.04s}$$

Considerando che la massa di acqua di SuperKamiokande è di $3 \times 10^6 \text{ kg}$, mentre la massa di acqua nei due globi oculari di tutta l'umanità è stimabile come 10^8 kg , ci aspettiamo **400** lampi Cherenkov.