Corso di Introduzione all'Astrofisica
P. Monaco, AA 2015/2016

Soluzione degli esercizi
Parte 1, Misure astronomiche

(1) Partendo da

$$M = m - 5\log d + 5$$

dove d è in pc, usiamo la relazione tra AU e pc per trovare:

$$B = M_{B,\odot} + 5\log(1\ \mathrm{AU}/1\ \mathrm{pc}) - 5 = \mathbf{-26.09}$$

Il rapporto tra le luminosità apparenti, considerando $B = 0$ per Vega, è:

$$10^{-0.4\times(-26.09)} = \mathbf{2.73 \times 10^{10}}$$

Se il Sole fosse a 300 pc di distanza, si avrebbe:

$$B = M_{B,\odot} + 5\log 300 - 5 = \mathbf{12.87}$$

facilmente visibile con un telescopio amatoriale. A 10 kpc:

$$B = M_{B,\odot} + 5\log 10000 - 5 = \mathbf{20.48}$$

visibile con un buon telescopio da astrofili.

(2) Una velocità $v = 1$ km/s provoca uno spostamento Doppler di:

$$\frac{v}{c} = 3.33 \times 10^{6}.$$

A 4400 Å questo si traduce in uno spostamento di:

$$\delta\lambda = \mathbf{0.015\ Å}.$$

Possiamo prendere questa come risoluzione minima necessaria a misurare la velocità. Consideriamo adesso una riga dell'idrogeno a $T = 5800$ K, allargata termicamente; la velocità termica è:

$$v = \sqrt{\frac{kT}{m_p}} = 6.94\ \mathrm{km/s}.$$

A questa velocità corrisponde un allargamento di 0.10 Å. Per descrivere adeguatamente un profilo del genere dobbiamo avere una risoluzione molto migliore di questo intervallo. Per esempio:

$$\delta\lambda = \mathbf{0.01\ Å}.$$

(3) Per l'effetto Doppler, la velocità corrispondente a questo allargamento è:

$$v = c\,\frac{50\ Å}{1216\ Å} = \mathbf{12300\ km\ s^{-1}}.$$

La temperatura corrispondente è:

$$T = \frac{m_p v^2}{k} = \mathbf{1.82 \times 10^{10}\ K}.$$

Siccome l'idrogeno è completamente ionizzato a $T > 10^4 - 10^5$ K, e siccome la Lymanα richiede la presenza di idrogeno neutro, questa riga non può essere allargata termicamente, è più plausibile pensare al **moto macrosopico** di nubi.

(4) Supponiamo che il filtro V sia largo $\Delta\lambda = 1000$ Å. Se in un intervallo $\delta\lambda = 0.01$ Å rivelo $n = 1000$ fotoni, e se suppongo per semplicità che il numero di fotoni per bin di λ sia costante nel filtro, ottengo che il numero di fotoni che raccoglierei se avessi efficienza 1 è

$$N = n \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} \frac{1}{\epsilon}$$

dove $\epsilon = 0.2$ è l'efficienza del rivelatore. L'energia dei fotoni raccolti dal telescopio è $E = Nh\nu = Nhc/\lambda$ dove per semplicità usiamo $\lambda_0 = 5400$ Å per tutti i fotoni. Il flusso della stella misurato con un'esposizione di $t = 30$ m $= 1800$ s è quindi:

$$f_V = \frac{E}{St} = \frac{nhc}{\pi R^2 t \lambda_0 \epsilon} \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda}.$$

Sostituendo i valori dati otteniamo:

$$f_V = 1.06 \times 10^{-11} \text{ erg cm}^{-2}\text{s}^{-1} = 1.06 \times 10^{-14} \text{ W m}^{-2}.$$

La magnitudine corrispondente, calibrata su Vega, utilizzando il valore di f_0 dato nelle dispense ($f_0 = 3.03 \times 10^{-6}$ erg cm^{-2} s^{-1} $= 3.03 \times 10^{-9}$ W m^{-2}), è:

$$V = 2.5 \log \frac{f_0}{f_V} = \mathbf{13.73}.$$

(5) Utilizzando le equazioni per i sistemi stellari binari, otteniamo dalle equazioni (1.11)-(1.13):

$$m_1 = \frac{\Omega^2 r^3}{G} \frac{v_2}{v_1 + v_2}$$

e dall'equazione (1.12)+(1.13):

$$\Omega r = v_1 + v_2$$

La seconda si risolve immediatamente:

$$r = 2.65 \times 10^{10}\ m = \mathbf{0.176\ AU}$$

Inserendo questo valore di r nella prima equazione troviamo:

$$m_1 = 6.97 \times 10^{30} \text{ kg} = \mathbf{3.5\ M_\odot}$$

$$m_2 = 5.18 \times 10^{30} \text{ kg} = \mathbf{2.6\ M_\odot}$$

Per calcolare i raggi, basta calcolare che, rispetto alla stella 1, la stella 2 percorre un arco pari alla somma dei due diametri in un tempo $T = 8h\ 45m$ (pari alla durata totale dell'eclissi), e una distanza $2\pi r$ in un tempo $P = 2\pi/\Omega$. Quindi:

$$2R_1 + 2R_2 = T\Omega r = T(v_1 + v_2)$$

La seconda eguaglianza, che viene dalle equazioni riportate sopra, ci dice che il passaggio della stella 2 di fronte alla stella 1 avviene a velocità uguale a (v_1+v_2). La durata $t = 45$ m dell'eclissi totale corrisponde al percorrimento di una distanza pari alla differenza dei due diametri:

$$2R_1 - 2R_2 = t\Omega r = t(v_1 + v_2)$$

Risolvendo i due sistemi otteniamo, in raggi solari:

$$R_1 = \frac{1}{4}(T + t)(v_1 + v_2) = \mathbf{2.15\ R_\odot}$$

$$R_2 = \frac{1}{4}(T - t)(v_1 + v_2) = \mathbf{1.81\ R_\odot}$$

(6) Chiamando M la massa di una delle due stelle, dall'equazione (1.11) otteniamo:

$$\Omega = \sqrt{\frac{2GM}{r^3}}$$

e dall'equazione (1.12):

$$v = \frac{\Omega r}{2} = \sqrt{\frac{GM}{2r}}.$$

Possiamo risolvere le due equazioni assumendo $r = 1$ AU, e lasciando esplicita la dipendenza da r:

$$\Omega = 2.83 \times 10^{-7} \left(\frac{r}{1\ \mathrm{AU}}\right)^{-3/2}\ \mathrm{s^{-1}}$$

$$v = 21.0 \left(\frac{r}{1\ \mathrm{AU}}\right)^{-1/2}\ \mathrm{km\ s^{-1}}$$

Per il metodo spettroscopico, l'osservabile è

$$v \sin i = 14.8 \left(\frac{r}{1\ \mathrm{AU}}\right)^{-1/2}\ \mathrm{km\ s^{-1}}$$

La minima velocità osservabile è $v_{\mathrm{min}} = c\delta\lambda/\lambda = 6.8$ km/s. Questa si ottiene per ua distanza massima tra le stelle:

$$\mathbf{r_{max} < 4.8\ AU}.$$

L'angolo sotteso dal sistema è $\theta = r/d$. Supponendo che $r = r_{\mathrm{max}}$ e ponendo l'angolo a 0.5" si ottiene che per essere visibile come tecnica sia visuale che spettroscopica la binaria deve essere più vicina di:

$$\mathbf{d < 9.6\ pc}.$$

(7) Utilizzando l'equazione che lega l'angolo sotteso $\theta = R/d$ con raggio R e distanza d della stella, si ottiene

$$d = \mathbf{464\ pc}$$

.

(8) La minima velocità ricavabile dal moto proprio la calcoliamo come:

$$v_1 = \frac{d\delta\theta}{\Delta t} = \mathbf{7.10\ km\ s^{-1}}.$$

La minima velocità lungo la linea di vista risulta:

$$v_2 = c\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \mathbf{3.75\ km\ s^{-1}}.$$

A $d = 10$ kpc v_2 naturalmente non cambia, mentre:

$$v_1 = \mathbf{236\ km\ s^{-1}}.$$

(9) Una moneta di 1 euro sottende 1" a

$$\mathbf{d = 5.2\ km}$$

(10)

$$1\ \mathrm{pc} = \mathbf{3.09 \times 10^{18}\ cm = 3.09 \times 10^{16}\ m}$$

(11)

$$\mathbf{2.5 \times 10^{-5}}" \left(\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{D}}\right)$$

Per un antenna radio di 20 m che osserva a 21 cm, il limite di diffrazione è **2625"**= 44'. Per uno specchio di 1 m a 6000 Å il limite di diffrazione è di **0.15"**.

(12) Le risposte sono le seguenti:
a) **25"**,
b) **0.052"**,
c) **0.020"**,
d) rispettivamente **32**', **39"**, $\mathbf{3 \times 10^{-3}}$**"**.

Parte 2, Le stelle

(1) Per tracciare il grafico è sufficiente seguire le istruzioni.

(2) Tutti i procedimenti e i valori delle quantità richieste si trovano nelle dispense.

(3) La velocità tipica di un protone a temperatura $T = 1.5 \times 10^7$ K è:

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m_p}} = 611 \text{ km s}^{-1}$$

Dalla equazione (2.31), espressa nel sistema cgs, abbiamo che:

$$r = \frac{4e^2}{m_p v^2} = \mathbf{1.48 \times 10^{-10} \ cm = 1.48 \times 10^{-12} \ m}$$

Questo è un fattore **1060** volte il raggio del nucleo.

(4) La temperatura T_0 di bruciamento dell'idrogeno è calcolata nelle dispense.
Possiamo esprimere l'efficienza di generazione dell'energia come:

$$\epsilon = \epsilon_0 \exp\left[-\left(\frac{T}{T_0}\right)^{-1/3}\right]$$

Quello che vogliamo è la pendenza della curva $\log\epsilon\,(\log T)$ a $T = 1.5 \times 10^7$ K. Questo si può ottenere tramite una espansione in serie di Fourier. La pendenza è identica se utilizziamo il logaritmo naturale. Con un minimo di algebra risulta che:

$$\ln\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = -\exp\left(-\frac{1}{3}\ln\frac{T}{T_0}\right)$$

Chiamiamo $x = \ln(T/T_0)$, $f(x) = \ln(\epsilon/\epsilon_0)$:

$$f(x) = -\exp\left(-\frac{x}{3}\right)$$

La pendenza andrà valutata al valore $x_1 = \ln(1.5 \times 10^7 \text{ K}/T_0) = -7.84$. Risulta:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_1} = \frac{1}{3}\exp\left(-\frac{x_1}{3}\right) = \mathbf{4.55}$$

(5) Dalla figura 2.25 si ricava che il Main Sequence TurnOff (MSTO) per un ammasso di 7×10^9 yr avviene a $M_V \sim 4$, $B - V \sim 0.5$. Per vedere bene la Main Sequence richiediamo di risolvere le stelle fino a 2 mag più deboli del MSTO. Il modulo di distanza a $d = 20$ kpc è:

$$\mu = 5\log d - 5 = 16.5$$

per cui le magnuitudini a cui dobbiamo arrivare nelle bande B e V sono:

$$\mathbf{m_B \sim 23.0, \ m_V \sim 22.5}$$

(6) Utilizzando l'equazione (2.52), per $M = 0.6$ $\mathrm{M}_\odot$ otteniamo:

$$R = 1.06 \times 10^9 cm$$

La luminosità risulta:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 = \mathbf{1.28 \times 10^{-4}\ L_\odot}$$

Utilizzando $\mu = 2$, il tempo di raffreddamento risulta:

$$t_{\mathrm{WD}} = \frac{3MkT}{2\mu m_p L} = \mathbf{2.36 \times 10^7\ yr}$$

(7) Risulta utile calcolare il raggio di Schwartzschild e la corrispondente densità scalandole ad una $\mathrm{M}_\odot$:

$$R_{\mathrm{sch}} = \frac{2GM}{c^2} = 2.95 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)\ \mathrm{km}$$

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R_{\mathrm{sch}}^3} = 1.85 \times 10^{16} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2}\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$$

Per $M = 5$ $\mathrm{M}_\odot$ si ha: $\mathbf{R_{sch} = 14.8\ km}$, $\bar{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{= 7.4 \times 10^{14}\ cm^{-3}}$. Per $M = 10^8$ $\mathrm{M}_\odot$ si ha: $\mathbf{R_{sch} = 1.97\ AU}$, $\bar{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{= 1.85\ cm^{-3}}$. La densità del nucleo, ottenuta dividendo la massa del protone per $4\pi r_{\mathrm{nuc}}^3/3$, dove il raggio del nucleo è dato nel testo dell'esercizio (3), è di 1.44×10^{14} g cm^{-3}.

(8) Seguendo la dimostrazione data dalle equazioni (2.17)-(2.21), la pressione di radiazione è 1/3 della densità di energia e,

$$\int_c^s 4\pi r^3 dP = 3\int_c^s V dP = -3\int_c^s P dV = -3\int_c^s \frac{1}{3} e dV = -K$$

Questo implica che il teorema del viriale assume la forma:

$$\mathbf{K + \Omega = E = 0}$$

per cui la stella è sempre marginalmente legata.

(9) Seguendo il procedimento delineato nel Maoz, bisogna prima calcolare la "richiesta" di pressione, ottenendo la nota dipendenza $P \propto GM^{2/3}\rho^{4/3}$ (con un certo coefficiente); successivamente si usa la condizione per cui la pressione di radiazione è uguale a quella termica, per ottenere una relazione tra T e ρ ($T \propto \rho^{1/3}$); infine ci si calcola la "disponibilità" di pressione (in questo caso il doppio di una delle due pressioni in gioco), sostituendo alla temperatura la soluzione della relazione di cui sopra. Uguagliano la "richiesta" e la "disponibilità" di pressione, si ottiene una relazione che ci permette di calcolare una massa:

$$M = 2^{3/2}\left(\frac{3^5}{4\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{a^{1/2}G^{3/2}} \left(\frac{k}{\mu m_p}\right)^2 = \mathbf{115\ M_\odot}$$

(10) Partendo dai dati dell'esercizio, e assumendo $\mu = 1$ per i neutroni per calcolare la loro densità numerica n,

$$l = \frac{1}{n\sigma} = \mathbf{25\ m}$$

Per emergere al di fuori della stella di neutroni il neutrino ci mette un tempo:

$$t = \frac{3R^2}{lc} = \mathbf{0.04 s}$$

Considerando che la massa di acqua di SuperKamiokande è di 3×10^6 kg, mentre la massa di acqua nei due globi oculari di tutta l'umanità è stimabile come 10^8 kg, ci aspettiamo **400** lampi Cherenkov.

Parte 3, I pianeti

(1) La velocità di rotazione del Sole attorno al comune centro di massa la otteniamo usando l'equazione (3.2):

$$M_P \sin i = \frac{\Omega r^2}{G} v_\star \sin i$$

Se $i = 90°$, la velocità della stella è semplicemente $v_\star = GM_P/\Omega r^2$. Per Giove si ha che $M_P = 1.90 \times 10^{30}$ g, $r = 7.78 \times 10^{13}$ cm e $P = 11.9$ yr, per cui $\Omega = 2\pi/P = 1.67 \times 10^{-8}$ s. Si ricava una velocità di:

$$v_\star = \mathbf{12.5\ m\ s^{-1}}$$

Utilizzando la legge dell'effetto Doppler, ricaviamo che lo spostamento in lunghezza d'onda corrispondente a questa velocità e a 7000Å è:

$$\delta\lambda = \mathbf{2.9 \times 10^{-4}\ Å}$$

La diminuzione relativa del flusso è uguale al rapporto tra il quadrato dei raggi del Sole e di Giove. Sapendo che $R_P = 6.99 \times 10^9$ cm, si ha che:

$$\delta f = \left(\frac{R_P}{R_\odot}\right)^2 = \mathbf{1\%}$$

Questo corrisponde ad una differenza di magnitudini di:

$$\delta m = 2.5 \log \frac{f - \delta f}{f} = \mathbf{-0.011\ mag}$$

Un transito dura il tempo necessario ad attraversare una lunghezza pari alla somma dei diametri di stella e pianeta, alla velocità pari alla somma della velocità della stella e del pianeta. Questa ultima quantità si può calcolare semplicemente come:

$$v_P = \frac{M_\star}{M_P} v_\star = 13.1 \text{ km s}^{-1}$$

Chiaramente la velocità è dominata da quella del pianeta e il raggio da quello della stella. Otteniamo:

$$\delta t = \frac{2(R_\odot + R_P)}{v_\star + v_P} = 1.1 \times 10^5 \text{ s} = \mathbf{32\ h}$$

Un telescopio di 40m che lavora al limite di diffrazione a 2 μm raggiunge una risoluzione angolare di

$$\theta = 1.22 \frac{2\ \mu m}{40\ m} = 6.1 \times 10^{-8} rad = 0.0126''$$

A questa risoluzione angolare permette di risolvere 5.2 AU ad una distanza di:

$$d = \frac{5.2 \text{ AU}}{0.012''} = \mathbf{413\ pc}$$

(2) Lo stesso esatto procedimento va usato per calcolare le stesse quantità per Saturno. In questo caso $M_P = 5.68 \times 10^{29}$ g, $R_P = 5.82 \times 10^9$ cm, $r = 9.58$ AU, $P = 29.5$ yr. Si ottiene:

$$v_\star = \mathbf{2.71\ m\ s^{-1}}$$

$$\delta\lambda = \mathbf{6.3 \times 10^{-5}\ \text{Å}}$$
$$\delta f = \mathbf{0.7\%} = \mathbf{-0.0076\ mag}$$
$$\delta t = \mathbf{44\ h}$$
$$d = \mathbf{762\ pc}$$

(3) Per la Terra: $M_P = 5.97 \times 10^{27}$ g, $R_P = 6.37 \times 10^8$ cm, $r = 1$ AU, $P = 1$ yr. Si ottiene:

$$v_\star = \mathbf{0.089\ m\ s^{-1}}$$
$$\delta\lambda = \mathbf{2.07 \times 10^{-6}\ \text{Å}}$$
$$\delta f = \mathbf{8.4 \times 10^{-3}\%}\,, \mathbf{-0.000091\ mag}$$
$$\delta t = \mathbf{13.2\ h}$$
$$d = \mathbf{79.5\ pc}$$

(4) Il contrasto tra le luminosità bolometriche si calcola facilmente calcolando la luminosità della Terra come:

$$L_\oplus = 4\pi R_\oplus^2 \sigma T^4 = 1.99 \times 10^{24}\ \mathrm{ergs^{-1}}$$

dove si è supposto che $T_\oplus = 288$ K. Il rapporto con la luminosità solare è:

$$\frac{L_\oplus}{L_\odot} = \mathbf{5.1 \times 10^{-10}}$$

Va notato che questo rapporto ignora la luce solare riflessa dalla Terra. Per calcolare lo stesso rapporto alla lunghezza d'onda di 10μm, notiamo che il picco dell'emissione della Terra, per la legge di Wien, è quasi esattamente a questa lunghezza d'onda. Per il Sole, invece il rapporto tra l'emissione al picco (che risulta essere a 0.5 μm) e l'emissione a $\lambda = 10\mu$m, usando la legge del corpo nero (equazione 1.8), si può calcolare come:

$$\frac{B_\lambda}{B_{\rm picco}} = \left(\frac{\lambda_{\rm picco}}{\lambda}\right)^5 \frac{\exp(hc/\lambda_{\rm picco}kT_{\rm picco}) - 1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} = 1.57 \times 10^{-4}$$

Questo fattore penalizzerà l'emissione del Sole rispetto a quella della Terra. Si ottiene quindi:

$$\frac{L_{\oplus,10\mu}}{L_{\odot,10\mu}} = \mathbf{3.26 \times 10^{-6}}$$

(5) La procedura e la soluzione di questo problema sono indicate nelle dispense. Si trova che $T_\oplus = \mathbf{255\ K}$.

(6) La velocità di fuga dalla terra è:

$$v_{\rm esc} = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}} = 11.2\ \mathrm{km\ s^{-1}}$$

mentre la massa del meteorite risulta $M = 1.57 \times 10^{15}$ kg. Con questo dato è facile calcolare l'energia cinetica:

$$E = \mathbf{9.80 \times 10^{19}\ J = 2.3 \times 10^4\ Mt}$$

Per calcolare l'energia necessaria ad evaporare gli oceani bisogna tenere conto della capacità specifica dell'acqua, pari a 4.1855 J K^{-1} g^{-1}, e del suo calore latente di ebollizione, pari a 2260 J g^{-1}. Il secondo contributo ($E = 3.16 \times 10^{27}$ J) è dominante rispetto al primo ($E = 0.48 \times 10^{27}$ J). Il risultato è:

$$E = \mathbf{3.64 \times 10^{27}\ J}$$

Questa energia si ottiene con un meteorite di diametro $R = \mathbf{334\ km}$ che cade sulla terra con una velocità pari alla velocità di fuga.

Parte 4, Cosmologia

(1) Utilizzando la legge di Hubble, la distanza risulta:

$$d = \frac{cz}{H_0} = \mathbf{265.5\ Mpc}$$

(2) Come detto nelle dispense, tempo di Hubble risulta essere $t_0 = H_0^{-1} = \mathbf{9.78 \times 10^9\ h^{-1}\ yr}$. Per $h = 0.678$ abbiamo $t_0 = \mathbf{1.44 \times 10^{10}\ yr}$.

(3) La densità media di stelle la otteniamo moltiplicando la densità di galassie per il numero di stelle, cioè $n = 10^8$ Mpc^{-3}. In termini fisici questa densità è estremamente piccola: $n = 3.39 \times 10^{-66}$ cm^{-3}. Utilizzando $\sigma = \pi R_\odot^2 = 1.52 \times 10^{22}$ cm^2, otteniamo:

$$l = 1/n\sigma = 1.94 \times 10^{43}\ \text{cm} = \mathbf{6.27 \times 10^{18}\ Mpc}$$

Un valore così grande del cammino libero medio permette di risolvere facilmente il paradosso di Olbers per ogni valore ragionevole dell'orizzonte (nella cosmologia attuale la distanza propria fino alla ricombinazione è di ~ 14000 Mpc).

(4) La densità critica per $H_0 = 100\ h$ km/s/Mpc vale $rho_c = 1.88 \times 10^{-29}\ h^2$ g cm^{-3}. Per $\Omega_0 = 0.308$ e $H_0 = 67.8$ km/s/Mpc, si ottiene:

$$\rho_0 = \mathbf{2.66 \times 10^{-30}\ g\ cm^{-3}}$$

Per contenere $10^{12}\ M_\odot$ una sfera deve avere un raggio $R = \mathbf{1.82\ Mpc}$.

(5) Usando la legge di Wien per $T = 2.73$ K, otteniamo: $\lambda = \mathbf{1.06\ mm}$. Questa lunghezza d'onda cade nel radio, nella banda delle microonde.

(6) Il redshift causato dall'effetto Doppler è $\delta\lambda/\lambda = v/c = 10^{-3}$. Usando la legge di Wien è facile mostrare che la differenza di temperatura corrispondente ad $\delta\lambda$ è $\delta T/T = -\delta\lambda/\lambda$. Ne consegue che l'ampiezza del dipolo visibile nel CMB per effetto del nostro moto è: $\delta T = \mathbf{2.73 \times 10^{-3}\ K}$. Il moto della terra (29.82 km/s) avrà invece ampiezza $\delta T = 2.71 \times 10^{-4}$, per cui per percepirlo la temperatura dovrà essere misurata con un'accuratezza non inferiore a $\mathbf{10^{-4}\ K}$.

(7) Se il tipico fotone ha una lunghezza d'onda pari a quella del picco dello spettro di corpo nero del CMB (esercizio 5), la sua energia è $h\nu = 1.88 \times 10^{-15}$ erg. Dividendo la densità di energia aT^4 del CMB per questa energia del fotone otteniamo una densità in numero di fotoni di $n_\gamma = \mathbf{224\ cm^{-3}}$. Questa è solo una stima per ordine di grandezza, in quanto non tiene conto della distribuzione di energia dei fotoni. Utilizzando il valore dato nel testo dell'esercizio, e poiché la densità in numero di barioni è $n_b = \rho_c\Omega_b/m_p$, otteniamo per η:

$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma} = \mathbf{2.68 \times 10^{-8}\ \Omega_b h^2}$$

(8) La densià di energia associata ad una costante cosmologica Λ è

$$\epsilon_\Lambda = \frac{c^2\Lambda}{8\pi G}$$

che è una combinazione di costanti. Questo vale anche per la densità di massa equivalente $\rho_\Lambda = \epsilon_\Lambda/c^2$. Quindi, se prendiamo un volume V, l'energia in esso contenuta sarà $U = \rho_\Lambda c^2 V$. Dalla prima legge della termodinamica (la terza equazione di Friedmann nel linguaggio del Maoz), $dU + PdV = 0$. Ma nel nostro caso (e omettendo il pedice Λ) $dU = \rho c^2 dV$, per cui $\boldsymbol{\rho} + \mathbf{P} = \mathbf{0}$, ovvero $\mathbf{P} = -\boldsymbol{\rho}\mathbf{c^2}$.

L'evoluzione del fattore di scala sotto l'influenza della costante cosmologica può essere calcolato a partire dal nostro approccio Newtoniano procedendo come segue. Abbiamo calcolato l'equazione di Friedmann nel caso di un universo pieno di materia o di radiazione; quello che cambia è l'evoluzione della massa equivalente all'interno del volume contenuto entro il raggio r; costante per la materia, evolvente come a^{-1} per la radiazione. Analogamente, calcoliamo l'evoluzione nel caso in cui l'unica forma di massa-energia sia la costante cosmologica. La massa equivalente è $M(t) = \rho_\Lambda V = M_0 a^3$. In questo modo, ripercorrendo i passaggi della dimostrazione è facile ottenere che:

$$\left(\frac{\mathbf{H}}{\mathbf{H_0}}\right)^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{\Omega_\Lambda} + \frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{\Omega_\Lambda}}{\mathbf{a^3}}$$

Inoltre, risulta che $\Omega_\Lambda = \Lambda/8\pi G \times 8\pi G/3H_0^2 = \Lambda/3H_0^2$.