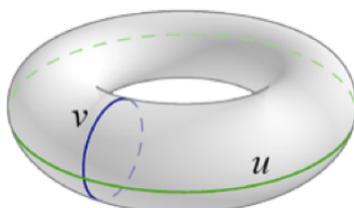


# Cosmologia I

## Prima prova intermedia, 3 maggio 2018

2018/2019  
Prof. Pierluigi Monaco

### Esercizio 1



$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = (c + a \cos v) \cos u \\ y = (c + a \cos v) \sin u \\ z = a \sin v \end{cases}$$

La figura qui sopra rappresenta un toro, ottenuto ruotando un cerchio di raggio  $a$  attorno a un punto a distanza  $c$  dal centro del cerchio ( $c > a$ ). La posizione sul toro è rappresentata dalle coordinate  $u$  e  $v$  come nel disegno, entrambe variabili tra  $0$  e  $2\pi$ . La metrica su una superficie toroidale si può scrivere come:

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag}((c + a \cos v)^2, a^2) \quad (1)$$

1. Calcolare lo scalare di Ricci sul toro.
2. Che segno assume? che significato ha il segno?

**Suggerimenti:** se nei risultati intermedi (tipo: componenti del tensore di Riemann) l'algebra diventa molto complessa, tornate indietro e ricontrollate. Ricordatevi che le simmetrie si applicano al tensore di Riemann quando gli indici sono tutti in basso.

### Esercizio 2

Un'astronave deve arrivare al centro della galassia, che dista  $d = 8$  kpc dalla terra in un sistema a riposo con la Via Lattea. L'astronave parte da ferma in questo sistema, e accelera ad  $a = 1g$  (definito nel MCRF dell'astronave) costante nel tempo. A metà strada inverte la direzione dei motori e decelera ad  $a = 1g$  fino ad arrivare al centro della galassia a velocità trascurabile. Per le domande che seguono consideriamo la prima metà del viaggio ad accelerazione costante (la seconda per simmetria avrà uguale durata) e ignoriamo la gravità.

1. Calcolate, nel sistema di riferimento della galassia, la velocità dell'astronave in funzione del tempo proprio e il suo fattore di Lorentz.

2. Calcolate la distanza percorsa in funzione del tempo proprio  $\tau$ , e stimate il tempo richiesto per il viaggio nei due sistemi di riferimento. Qual'è il massimo fattore  $\gamma$  di Lorentz che l'astronave raggiunge?
3. Tracciate qualitativamente il diagramma spaziotemporale della traiettoria dell'astronave nel sistema di riferimento della galassia. Riuscireste a tracciare gli assi del MCRF alla massima velocità? argomentare la risposta.
4. Viaggiando in questo modo, quanti anni ci si mette ad arrivare al centro della galassia?

**Suggerimenti:** decidere da subito se usare le unità con  $c = 1$  o le unità internazionali. Nel primo caso ( $c = 1$ ) sarà necessario trasformare  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  in  $m^{-1}$  o in  $s^{-1}$ . La seconda scelta dà un piccolo vantaggio nella soluzione del problema, soprattutto se si sceglie di lavorare in anni (e anni luce).

1 kpc (kiloparsec) corrisponde a  $3.09 \times 10^{19} \text{ m}$  ovvero a 3.26 anni luce, e  $1 \text{ yr} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$ .

Per chi naviga nel buio ribadiamo l'ovvio:  $d\vec{x}/d\tau = \vec{U}$  e  $d\vec{U}/d\tau = \vec{A}$ .

Se non fate errori incontrerete un'equazione del tipo

$$\frac{df}{dx} = a(1 - f^2)$$

che ha come soluzione  $f = \tanh(ax)$ . Ricordatevi che  $\tanh x = \sinh x / \cosh x$  e  $\cosh^2 x = 1/(1 - \tanh^2 x)$ . Ricordatevi anche che per  $x \gg 1$  si ha che  $\sinh x \gg 1$ ,  $\cosh x \gg 1$ ,  $\tanh x \sim 1$ .

### Esercizio 3

Al centro della galassia si trova un buco nero di  $4 \times 10^6 M_\odot$  (masse solari). L'astronave, arrivata nei pressi del buco nero, si mantiene (con opportuni razzi) ferma, alla distanza di coordinate  $r = 1000R_s$  in un sistema di riferimento a riposo con la galassia e con il buco nero, e lascia cadere una sonda verso il buco nero.

1. A che distanza (di coordinate) dal buco nero si trova l'astronave, in m? per riferimento, la distanza media tra Terra e Sole (unità astronomica) è di  $1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ .
2. Ricavare in modo generico le equazioni del moto della sonda, e fissare i parametri liberi  $\tilde{E}$  e  $\tilde{L}$  usando le condizioni iniziali.
3. Se la nave può ricevere segnali dalla sonda con una tolleranza massima di un fattore 10 in frequenza, a che distanza di coordinate dal buco nero perderà il segnale? quale sarà il redshift gravitazionale?

**Suggerimenti:** la massa solare è  $M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ ; tenete presente la relazione tra redshift e frequenza.