Cosmologia I
Seconda prova intermedia, 7 giugno 2018

2018/2019
Prof. Pierluigi Monaco

Esercizio 1

Considerate i seguenti modelli di FRW:

- EdS1: $h = 0.5$, $\Omega_{m0} = 1$, altri Ω nulli;
- EdS2: $h = 0.7$, $\Omega_{m0} = 1$, altri Ω nulli;
- Open: $h = 0.7$, $\Omega_{m0} = 0.3$, $\Omega_{k0} = 0.7$, altri Ω nulli;
- Lambda: $h = 0.7$, $\Omega_{m0} = 0.3$, $\Omega_{\Lambda 0} = 0.7$, altri Ω nulli.

1. Riportare in un grafico l'evoluzione del fattore di scala $a(t)$ per i quattro modelli, in modo che coincidano i punti in cui $a(t_0) = 1$.
2. Supponiamo che l'ammasso globulare più antico abbia un'età misurata di $t_{\rm gc} = 15.5 \pm 1.9$ Gyr. Quali modelli sarebbero consistenti con questa evidenza?
3. Nei modelli Open e Lambda, a che valori di fattore di scala a e di redshift z si ha la transizione dalla fase dominata dalla materia a quella successiva?

Suggerimenti: è utile tenere presente che $H_0^{-1} = 9.78\, h^{-1}$ Gyr (miliardi di anni). Sarà apprezzata una tabellina che riporti, per esempio, i tempi scala principali per ogni modello (t_0, H_0^{-1}...), in modo da facilitare la lettura del grafico.

Esercizio 2

Un universo piatto ha la seguente evoluzione: (1) da $t = 0$ a $t = t_i = 10^{-35}$ s evolve come un modello dominato dalla radiazione, (2) a t_i parte una fase di inflazione esponenziale (con H costante) che dura N_e e-fold fino a $t = t_f$ (cioè $H(t_f - t_i) = N_e$), (3) da t_f a $t_0 = 13.8$ Gyr l'espansione segue di nuovo un modello dominato dalla radiazione. Questa evoluzione avviene mantenendo continuo sia il fattore di scala $a(t)$ che il parametro di Hubble $H(t)$.

1. Quanto valgono, in funzione di N_e, i fattori di scala $a_i = a(t_i)$ e $a_f = a(t_f)$ se $a_0 = a(t_0) = 1$?

2. Calcolate la dimensione dell'orizzonte comovente di Hubble $d_{cH} = c/\dot{a}$ a $t = t_i$ e a $t = t_0$. Quanti e-fold ci vogliono per risolvere il problema dell'orizzonte? commentare il risultato.

3. Calcolate i contributi $\Delta\eta$ al tempo conforme delle tre fasi, in funzione di N_e. Per il valore di N_e minimo per risolvere il problema dell'orizzonte, tracciare un diagramma conforme dell'universo indicando (anche qualitativamente) la posizione dell'orizzonte visibile. Cosa succederebbe se aggiungessimo 10 ad N_e?

Suggerimenti: per chi non se lo ricordasse a memoria, 1 yr $= 3.16 \times 10^7$ s. È utile esprimere tutti i risultati in funzione di t_i e N_e. Possiamo supporre che il parametro di Hubble H durante l'inflazione rimanga uguale al valore che aveva a t_i; per la terza fase dell'evoluzione, bisogna notare che un'estrapolazione a $t < t_f$ di $a(t)$ porterà il fattore di scala ad annullarsi per $t \neq 0$. Quindi bisogna ipotizzare che $a(t) = a_f[(t-t_3)/(t_f-t_3)]^{1/2}$, dove a_f è il fattore di scala alla fine dell'inflazione e il parametro t_3 viene fissato imponendo la continuità del parametro di Hubble.

Esercizio 3

Consideriamo il periodo di nucleosintesi del Big Bang, ricordandoci che l'energia di legame del deuterio è $B_d = 2.2$ MeV, e assumendo che $\eta = 5.97 \times 10^{-10}$ e che $X_n = n_n/n_b$ (includendo sia i neutroni liberi che quelli legati) rimanga "congelato" al valore $X_n = 0.18$.

1. Ricavare l'equazione di Saha per la densità di n, p, ^2H (ovvero d) e γ.

2. Secondo questa equazione, a quali temperature (espresse in multipli di eV) si ha che il 50% dei neutroni si è trasformato in d?

3. Rifare il calcolo del punto (2) per una concentrazione di d pari a 10 volte il numero di neutroni rimasti. Come si confronta con la stima data dal Bonometto di $T \simeq 50$ KeV? Calcolare, nel modo il più possibile esatto, il fattore di scala e il tempo a cui la temperatura raggiunge il valore qui ottenuto.

Suggerimenti: ricordarsi che $m_p c^2 = 938$ Mev, 1 K corrisponde a 8.62×10^{-8} keV e $\zeta(3) = 1.202$. Il calcolo di $R(T)$ richiede un minimo di concentrazione ed un utilizzo adeguato delle informazioni in possesso. Troverete un'equazione da risolvere del tipo $x^{3/2}\exp(-x) = a$, dove a è una costante. Scrivete la soluzione come $x = -\ln(ax^{-3/2})$, partite dall'ipotesi $x = 1$ e risolvete per approssimazioni successive, iterando fino a convergenza (basteranno 2–3 iterazioni).