Cosmologia I
Prima prova intermedia, 3 maggio 2018
Soluzioni

2018/2019
Prof. Pierluigi Monaco

Esercizio 1

Data la metrica $g_{\alpha\beta}$, il calcolo procede come segue:

1. ci si calcola la metrica inversa $g^{\alpha\beta}$;
2. si passa alle derivate della metrica $g_{\alpha\beta,\mu}$, l'unica componente non nulla risulta $g_{uu,v} = -2a \sin v(c + a \cos v)$;
3. si calcolano poi i simboli di Christoffel $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, quelli non nulli risultano ${\Gamma^u}_{uv} = {\Gamma^u}_{vu} = -a \sin v/(c + a \cos v)$ e ${\Gamma^v}_{uu} = \sin v(c + a \cos v)/a$;
4. in due dimensioni c'è una sola componente indipendente del tensore di Riemann, possiamo calcolare per esempio ${R^u}_{vuv} = a \cos v/(c + a \cos v)$;
5. il tensore di Ricci lo calcoliamo contraendo opportunamente gli indici: $R_{\alpha\beta} = {R^u}_{\alpha u\beta} + {R^v}_{\alpha v\beta}$, è chiaro dalle simmetrie del tensore di Riemann che il tensore di Ricci sarà diagonale;
6. bisogna calcolare ${R^v}_{uvu}$ come segue: (a) partire da ${R^u}_{vuv}$, (b) abbassare il primo indice con la metrica, (c) imporre la simmetria calcolando R_{vuvu}, (d) alzare il primo indice con la metrica inversa, ottenendo ${R^v}_{uvu} = \cos v(c + a \cos v)/a$;
7. si ottiene $R_{uu} = \cos v(c + a \cos v)/a$, $R_{vv} = a \cos v/(c + a \cos v)$;
8. il tensore di Ricci sarà $g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{uu}R_{uu} + g^{vv}R_{vv}$.

Il risultato è:

$$R = \frac{2 \cos v}{a(c + a \cos v)}.$$

Il denominatore sarà sempre positivo, dato che $c > a$, per cui il segno sarà determinato da $\cos v$, che è negativo nella parte interna del toro. In questo caso la geometria è di tipo iperbolico, la curvatura della superficie è interna al toro in direzione $x - y$ ed esterna quando si va lungo l'asse z.

Esercizio 2

Assumendo che il moto avvenga lungo l'asse x, il vettore accelerazione nel MCRF è $\vec{A} \rightarrow (0, a, 0, 0)$, dove, chiamando $g = 9.8\ m\,s^{-2}$, a per $c = 1$ assume il valore di $a = g/c\ s^{-1} = 3.3 \times 10^{-8}\ s^{-1} \sim 1.0\ yr^{-1}$.

Per trovare il vettore $\vec{A}$ nel sistema di riferimento della galassia, usiamo una trasformazione di Lorentz inversa (velocità ed accelerazione saranno lungo la stessa direzione), ottenendo: $\vec{A} \rightarrow (\gamma av, \gamma s, 0, 0)$. Qui v è la velocità della nave nel sistema della galassia e γ il suo fattore di Lorentz. Chiaramente nello stesso sistema si ha che $\vec{U} \rightarrow (\gamma, \gamma v, 0, 0)$.

Le equazioni del moto saranno date da

$$\frac{d\vec{U}}{d\tau} = \vec{A}$$

Le componenti 0 e 1 danno, rispettivamente:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma va$$

$$\frac{d\gamma v}{d\tau} = \gamma a$$

Combinando le due equazioni si ottiene:

$$\frac{dv}{d\tau} = a(1 - v^2)$$

la cui soluzione e' $v(\tau) = \tanh(a\tau)$, che tende a 1 quando $a\tau$ diventa grande. Questo vuol dire che la nave raggiungerà velocità relativistiche dopo avere accelerato costantemente per ~ 1 yr.

È immediato calcolare il fattore γ di Lorentz:

$$\gamma(\tau) = \cosh(a\tau)$$

Per calcolare la distanza percorsa, basta ricordarsi che

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \vec{U}$$

Supponendo che $\vec{x} \to (t, \ell, 0, 0)$, le componenti 0 e 1 di questa equazione danno:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma = \cosh(a\tau)$$

$$\frac{d\ell}{d\tau} = \gamma v = \sinh(a\tau)$$

che si integrano facilmente, ottenendo:

$$t(\tau) = \frac{1}{a}\sinh(a\tau)$$

$$\ell(\tau) = \frac{1}{a}(\cosh(a\tau) - 1)$$

La distanza da coprire (4000 pc) si può calcolare in anni luce, $\ell = 13000$ yr, per cui, dato che l'inverso di a è circa pari ad 1 yr, si ha che $\cos(a\tau) - 1 \sim 13000$, che vuol dire che $a\tau \sim 10$ yr. Inoltre, per valori di $a\tau$ così grandi si ha che $\ell/a \sim \cosh(a\tau) \sim \gamma$, per cui il massimo fattore di Lorentz della nave è pari a 13000. Si ha anche che $\sinh(a\tau) \sim \cosh(a\tau)$, per cui il tempo di percorrenza è $t \sim \ell$, come se la nave fosse andata alla velocità della luce.

Il diagramma spaziotemporale corrisponderà ad una traiettoria time-like che, su tempi scala di ~ 1 yr, si approssima ad una traiettoria nulla. La velocità massima è troppo elevata per riuscire a tracciare graficamente il MCRF, dato che gli assi saranno quasi coincidenti con la traiettoria nulla.

Esercizio 3

Il raggio di Schwartzschild di un buco nero di $4 \times 10^6 \ M_\odot$ è pari a $R_s = 2GM/c^2 = 1.2 \times 10^{10} m = 0.079$ unità astronomiche (AU), $1000 R_s$ corrispondono a 79 AU.

La traiettoria di un corpo massivo attorno ad un buco nero si ricava come da lezione. Per una traiettoria radiale, chiaramente $\tilde{L} = 0$, mentre $\tilde{E}$ si può fissare imponendo che $dr/d\tau = 0$ alla distanza di coordinate $r = 1000 R_s$ a cui la sonda viene sganciata: $\tilde{E} = 1 - R_s/r = 1 - 1/1000 = 0.999$.

Il redshift gravitazionale è definito come $1 + z = \nu_{em}/\nu_{obs}$, il segnale si perde quando $\nu_{obs} = \nu_{em}/10$ quindi ad un redshift $z = 9$, relativo all'astronave. Tenendo conto del piccolo redshift gravitazionale a cui è sottoposta l'astronave, si ottiene che

$$1 + z = \frac{\sqrt{0.999}}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r_{\text{lost}}}}} = 10$$

da cui $r_{\text{lost}} = 1.01009 R_s$. L'errore che si commette trascurando il redshift gravitazionale a $1000 R_s$ è, come ci si attendeva, molto piccolo: in questo caso $r_{\text{lost}} = 1.01 R_s$.