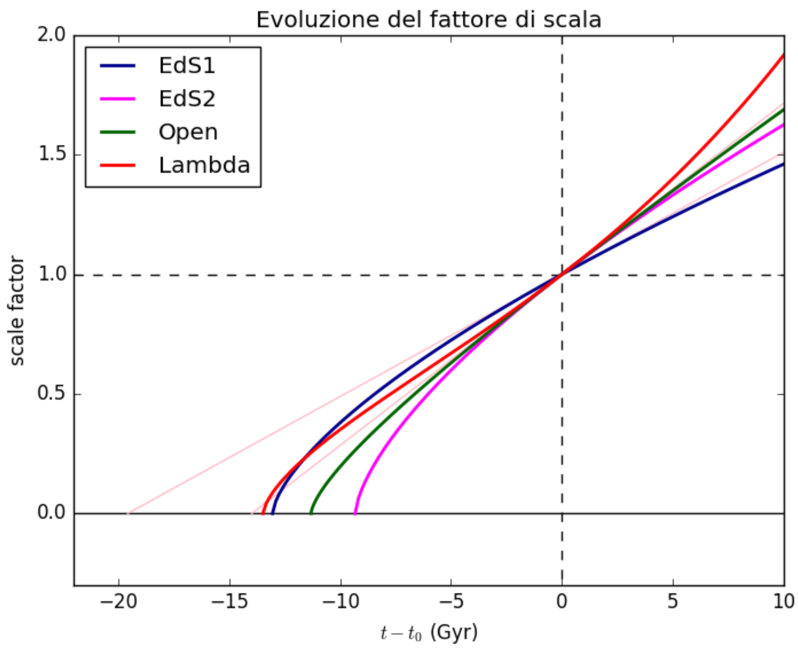
Cosmologia I
Seconda prova intermedia, 7 giugno 2018
Soluzioni

2018/2019

Prof. Pierluigi Monaco

Esercizio 1

Il grafico dovrà risultare simile a questo:



Nel grafico sono riportati, per chiarezza, anche i fattori di scala di due universi vuoti (di Milne) con $h = 0.5$ e $h = 0.7$. Le età dell'universo risultano $t_0 = 13.04$ Gyr (EdS1), $t_0 = 9.31$ Gyr (EdS2), $t_0 = 11.30$ Gyr (Open) e $t_0 = 13.47$ Gyr (Lambda).

Le quattro età dell'Universo si discostano da quella dell'ammasso globulare in questo modo: 1.29σ (EdS1), 3.25σ (EdS2), 2.2σ (Open), 1.06σ (Lambda). Questi dati sono sottostime della discrepanza, perchè gli ammassi globulari non si formano un istante dopo il big bang. Chiaramente il modello EdS2 è escluso, e Open è sfavorito. Va detto che il valore di t_{gc} dato nell'esercizio è caratteristico degli anni '90, non è attuale.

Per il modello Open, la transizione da dominio di materia a dominio di curvatura avviene ad $a^\star = \Omega_{m0}/\Omega_{k0} = 0.42$, ovvero a $z = 1.33$. Questo si può facilmente ricavare imponendo che i contributi alla seconda equazione di Friedmann, $\Omega_{m0}a^{-3}$ e $\Omega_{k0}a^{-2}$, siano uguali. Nel caso del modello Lambda, ci sono due possibili definizioni di transizione. L'equivalenza di densità di materia ed energia (uguaglianza di $\Omega_{m0}a^{-3}$ e $\Omega_{\Lambda 0}$) si ha ad $a = (\Omega_{m0}/\Omega_{\Lambda 0})^{1/3}$, da cui $a = 0.75$, $z = 1.33$, mentre l'inizio della fase di accelerazione si ha per $a = (\Omega_{m0}/2\Omega_{\Lambda 0})^{1/3} = 0.60$, $z = 0.67$.

Esercizio 2

L'evoluzione del fattore di scala segue le tre fasi:

1. $a(t) = a_i(t/t_i)^{1/2}$, dove a_i è il fattore di scala all'inizio dell'inflazione e t_i è dato. In questa fase il parametro di Hubble è $H = 1/2t$, per cui all'inizio dell'inflazione si ha che $H_i = 1/2t_i$. La derivata prima del fattore di scala è
$$\dot{a} = \frac{a_i}{2t_i}\left(\frac{t}{t_i}\right)^{-1/2} .$$

2. Il fattore di scala evolve esponenzialmente da t_i a t_f. Poichè H è costante in questa fase, lo poniamo uguale a H_i. Si ha quindi che
$$a(t) = a_i \mathrm{e}^{H_i(t-t_i)} .$$
A $t = t_f$ il fattore di scala è $a_f = a_i \exp N_e$. Inoltre,
$$t_f = N_e H_i^{-1} + t_i = (2N_e + 1)t_i .$$

3. Ipotizziamo che
$$a(t) = a_f\left(\frac{t - t_3}{t_f - t_3}\right)^{1/2} ,$$
dove t_3 è l'ipotetica posizione del big bang che si ottiene estrapolando a $t < t_f$ questo andamento. Il fattore di scala è già continuo, otteniamo t_3 imponendo la continuità del parametro di Hubble: $H(t_f) = 1/2(t_f - t_3) = H_i$. Otteniamo quindi che
$$t_3 = t_f - \frac{1}{2H_i} = 2N_e t_i .$$
Di conseguenza
$$a(t) = a_i \mathrm{e}^{N_e}\left(\frac{t}{t_i} - 2N_e\right)^{1/2} .$$

Imponendo che $a(t_0) = 1$ e considerando che $t_0/t_i = 4.36 \times 10^{52} \gg 2N_e$, otteniamo:
$$a_i = \mathrm{e}^{-N_e}\left(\frac{t_i}{t_0}\right)^{1/2} = 4.79 \times 10^{-27}\mathrm{e}^{-N_e},$$
$$a_f = \left(\frac{t_i}{t_0}\right)^{1/2} = 4.79 \times 10^{-27} .$$

L'orizzonte comovente evolve nel seguente modo:
$$d_{cH} = \frac{2ct_i}{a_i}\left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2} \qquad t < t_i$$
$$d_{cH} = \frac{2ct_i}{a_i}\mathrm{e}^{-H_i(t-t_i)} \qquad t_i < t < t_f$$

$$d_{cH} = \frac{2ct_i}{a_i} \mathrm{e}^{-N_e} \left(\frac{t}{t_i} - 2N_e \right)^{1/2} \qquad t_f < t < t_0$$

La condizione $d_{cH}(t_i) > d_{cH}(t_0)$ diventa quindi $\exp(-N_e)(t_0/t_i)^{1/2} < 1$, ovvero:

$$N_e > \frac{1}{2} \ln \frac{t_0}{t_i} = 60.6 \,.$$

Il tempo conforme

$$\eta = \int_0^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}$$

è un integrale in t, che possiamo scomporre nella somma di tre integrali sulle tre fasi di espansione: $\eta = \Delta\eta_1 + \Delta\eta_2 + \Delta\eta_3$. Utilizzando le soluzioni trovate sopra:

$$\Delta\eta_1 = \frac{2ct_i}{a_i}$$

$$\Delta\eta_2 = \frac{2ct_i}{a_i} \left(1 - \mathrm{e}^{-N_e}\right) \simeq \frac{2ct_i}{a_i}$$

$$\Delta\eta_3 = \frac{2ct_i}{a_i} \mathrm{e}^{-N_e} \left[\left(\frac{t_0}{t_i} - 2N_e \right)^{1/2} - 1 \right] \simeq \frac{2ct_i}{a_i} \mathrm{e}^{-N_e} \left(\frac{t_0}{t_i} \right)^{1/2}$$

Per $N_e = 60.6$ i tre contributi risultano uguali, ma se aggiungiamo 10 ad N_e il terzo contributo risulta più piccolo di un fattore $\exp(10) \sim 22000$.

Esercizio 3

L'equazione di Saha si ricava come nella lezione 22:

$$R(T) = \frac{n_p n_n}{n_d n_\gamma} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\zeta(3)} \left(\frac{m_p c^2}{4k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{B_d}{k_B T} \right) \,.$$

Conviene esprimere questa equazione in questi termini:

$$R = \frac{\sqrt{\pi}}{2\zeta(3)} \left(\frac{m_p c^2}{4B_d} \right)^{3/2} x^{3/2} \mathrm{e}^{-x} \simeq 811\, x^{3/2} \mathrm{e}^{-x} \,,$$

dove $x \equiv B_d/k_B T$. Se il 50% dei neutroni va in deuterio, si ha che:

$$n_p + n_n + 2n_d = n_b$$

$$n_d = n_n$$

$$n_n + n_d = 0.18 n_b$$

Infatti, il deuterio contiene 2 barioni e contribuisce 1 al numero di neutroni. In questo modo è facile ottenere che $n_n = n_d = 0.09\, n_b$, $n_p = 0.73\, n_d$, da cui $R = 0.73\eta$. L'equazione diventa quindi:

$$x^{3/2} \mathrm{e}^{-x} = \frac{0.73\eta}{811} = 5.37 \times 10^{-13} \,.$$

Si risolve iterando la soluzione $x = -\ln(5.37 \times 10^{-13}\, x^{-3/2})$, partendo da $x = 1$; la convergenza alla terza cifra decimale si ottiene in tre iterazioni: $x = 33.5$. Quindi $k_B T = 2.2$ MeV$/33.5 = 65$ keV.

Questo valore è più alto di quello dato dal Bonometto ($k_B T \sim 50$ keV). Un motivo è che rimane ancora da trasformare metà dei neutroni. Rifacendo il calcolo con $n_d = 10\, n_n$, si ottiene che $R = 0.066\eta$, $x = 36.0$, $k_B T = 61$ keV, ancora superiore a 50 keV; quello che stiamo certamente trascurando è il decadimento β dei neutroni, che fa diminuire X_n.

Il fattore di scala corrispondente a questo istante si può calcolare utilizzando la costanza dell'entropia comovente, per cui $g^{\star\ 1/3} a T = \text{const.}$ Il valore di $g^\star$ non cambia, perchè siamo già nell'era radiativa e $g^\star = 2$ fino ad oggi. Riferendosi alla temperatura del CMB $T_0 = 2.73$ K, otteniamo $a = 3.86 \times 10^{-9}$.

L'età dell'Universo la possiamo calcolare usando la formula

$$t = \sqrt{\frac{3}{32\pi G\rho}}\,,$$

dove

$$\rho = \frac{1}{c^2}\frac{\pi^2}{30} g^\star \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} (1 + 0.227 N_\nu)\,.$$

Usando $g^\star = 2$ e $N_\nu = 3$ otteniamo $t = 354$ s.